الإحصاء العام



تليفاكس: ٥٤٠٤٤٨٠ - الإسكندرية

أستاذ دكتور

جابر أحمد بسيوني


مكتبة الوفاء القانونية


مكتبة الوفاء القانونية

الإحصـــاء العـــام

أستاذ دكتور
جابر أحمد بسيونى
كلية الزراعة سابا باشا
جامعة الإسكندرية

الطبعة الأولى
2014م

الناشر
دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر
تليفاكس : 5404480 - الإسكندرية

مقدمة:

يضم هذا الكتاب بعض الأسس والأدوات التى قد تفيد الطلاب والباحثين والعاملين فى مجال الدراسات الإحصائية ، فهى بمثابة دليل للطالب فى حل بعض المسائل الإحصائية والاستفادة منها فى تطبيق تلك المسائل فى مجال الدراسات العلمية المختلفة فى مجال العلوم الطبيعية والاجتماعية والتى تشمل علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس ، وتفيد الباحث الذى يعمل فى مجال الدراسات الاجتماعية والعلوم الطبيعية فى اتخاذ بعض القرارات الخاصة بتخطيط الإنتاج والاستهلاك ومعالجة بعض مشاكل الغذاء وفى التنمية الاقتصادية والإدارة المزرعية والتسويق والتجارة الدولية وغيرها من الدراسات . كما تفيد تلك الأدوات العاملين فى مجال الدراسات الإحصائية فى توصيف بعض المدلولات الإحصائية والإشارة فى صورة رسوم بيانية تفيد سرعة إعطاء فكرة عن اتجاه تطور أى ظاهرة معينة .

ولقد سمى هذا الكتاب " الإحصاء العام " لإعطاء بعض المؤشرات أو المفاهيم التى تفيد فى توصيف وتحليل واستخلاص النتائج وتطبيقها فى شتى مجالات العلوم المختلفة . ولكى يتحقق الهدف من هذا الكتاب فقد قسمت الموضوعات المختلفة التى يضمها هذا الكتاب إلى ثمانية فصول تناول الأول منها التعريف بعلم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى ، وتناول الفصل الثانى مراحل البحث الإحصائى ، فى حين تناول كل من الفصل الثالث والرابع مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت على الترتيب ، بينما تناول الفصل الخامس تحليل الارتباط ، وتناول الفصل السادس تحليل الانحدار ، بينما اختص الفصل السابع بمبادئ الاحتمالات ، وتناول الفصل الثامن والأخير الأرقام القياسية .

وقد روعى فى هذا الكتاب بساطة التعبير والأسلوب ليتناسب مع دارسى المراحل الأولية للدراسات الإحصائية والاقتصادية والقياسية . ويحتوى الكتاب على قدر كبير من الأمثلة المحلولة حتى يتيسر على القارئ فهم الموضوعات المختلفة التى يضمها هذا الكتاب .

واعتمدت المادة العلمية لهذا الكتاب على العديد من المراجع العربية والأجنبية. والباحث إذ يضع خبرته الطويلة فى هذا العلم كطالب وباحث ومستفيد من حضور المؤتمرات الدولية والإقليمية والمحلية لا يصل بهذا الكتاب إلى درجة الكمال إذ أن الكمال لله الواحد فقط ، ولا يعفيه من الخطأ ولكنه ينشد الصواب فتلك مقدمة ومن سار على الدرب وصل .

والله يوفقنا جميعاً إلى خدمة مصرنا الحبيبة وأمتنا العربية بكل الخير والتقدم ،،،

المؤلف

الفصل الأول

تعريف علم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى

تمهيد :

يقصد بكلمة الإحصاء هو الحصر أو العد الدقيق لمختلف الأشياء . وعرفت الإحصاء منذ أقدم العصور، وإن استخدام الإحصاء فى الإثبات لا تعتبر علماً حديثاً ، فقد كان مستعمل منذ القرن السابع عشر ولكن فى الشكل البدائى الذى لا يتعدى جمع البيانات الأولية واستخدامها فى صورتها الخام أو بعد تعديل طفيف للوصول إلى استنتاجات معينة الأمر الذى من شأنه أن يعرض الباحثين للوقوع فى بعض الأخطاء نتيجة الاعتماد على البيانات الأولية دون تحليلها . ولتلاشى تلك الأخطاء وضعت عدة قوانين وقواعد إحصائية تساعد الباحثين فى كيفية استخدام الأرقام التى يسجلونها عن مختلف الظواهر فى رفض أو قبول فروض معينة وتقييم النتائج التى يتوصلون إليها بأسلوب البحث الإحصائى . ولقد كثرت هذه القواعد والقوانين الإحصائية وأصبحت فى حد ذاتها حقائق ثابتة رياضياً مما جعل الإحصاء علماً قائماً بذاته وله أهمية فى علاقته بالعلوم الأخرى مثل العلوم الاجتماعية كالاقتصاد و الاجتماع والمجتمع الريفى وغير ذلك ، والعلوم الطبيعية وغيرها من العلوم التى تبحث فى الظواهر المتغيرة التى يمكن قياسها والتعبير عنها فى صورة كمية .

ويتناول هذا الفصل التعاريف المختلفة لعلم الإحصاء وخصائص ووظائف علم الإحصاء وعلاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى .

تعريف علم الإحصاء وخصائصه ووظائفه :

أولاً : تعريف علم الإحصاء :

يوجد عدة تعاريف لعلم الإحصاء نذكر منها :

1- يعرف علم الإحصاء بأنه مجموعة النظريات والقوانين والقواعد المختلفة المتعلقة بتجميع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات الإحصائية مثل البيانات الخاصة بالإنتاج الزراعى أو الإنتاج الصناعى أو الصادرات أو الواردات أو عدد السكان وغير ذلك من البيانات بغرض الوصول إلى استنتاجات قيمة تساعد الباحث فى الوصول إلى النتائج التى يرغبها والتنبؤ بها فى المستقبل .

2- يشير علم الإحصاء إلى المبادئ المختلفة والأساليب المتعددة المستخدمة فى جمع وتحليل وتفسير هذه البيانات وهو بهذا المفهوم يمثل الإحصاء فرعاً من فروع الرياضة التطبيقية والذى أصبح الآن علماً قائماً بذاته له أساليبه وقواعده وفروعه المختلفة .

3- هو العلم الذى يتعلق بدارسة المعلومات التى تستخدم لاتخاذ القرارات الممكنة تحت ظروف التشكك أو اللايقين .

مما سبق يتبين أن علم الإحصاء يتضمن الأسلوب العلمى لتقصى حقائق الظواهر بمختلف أنواعها واستخلاص النتائج عنها ، كما يتضمن أيضاً النظرية اللازمة للقياس واتخاذ القرار فى كافة الميادين الاقتصادية والاجتماعية والسياسية والعسكرية وغير ذلك .

وبمعنى آخر فإن علم الإحصاء هو العلم الذى يهتم بجمع وتنظيم وترتيب وتحليل البيانات حتى يمكن الحصول على نتائج صحيحة تساعد فى اتخاذ القرارات السليمة .

وهناك عدة فروع لعلم الإحصاء منها : (1) الإحصاء الاقتصادى ، (2) الإحصاء الرياضى ، (3) الإحصاء البيولوجى ، (4) الإحصاء

الاعلامـى ، (5) الإحصـاء الاجتمـاعى ، (6) الإحصـاء الإسـتدلالي ، (7)تصميم التجارب .

ثانياً : خصائص علم الإحصاء :

يمكن ذكر أهم خصائص علم الإحصاء فيما يلى:

1- يعتمد على حقائق كمية وعلى حقائق غير كمية (نوعية) ولكن بعد تحويلها إلى بيانات كمية .

2- يعتمد على حقائق جماعية وليست فردية .

3- يجب أن ترتبط الحقائق الجماعية ببعضها البعض من حيث تطورها مع الزمن أو وضعها بالنسبة لجميع الحقائق المناسبة لهذه المجموعات .

4- يهدف الإحصاء إلى الوصول إلى القيمة الحقيقية لمقاييس المجتمع المختلفة مثل متوسط درجات مادة معينة لجميع الطلاب فى نفس السنة الدراسية .

ثالثاً : وظائف علم الإحصاء :

تتلخص وظائف علم الإحصاء فيما يلى :

1- حصر وترتيب وتبويب البيانات سواء كان هذا الحصر شاملاً أو عن طريق العينات أو بعمل تصميم للتجارب ثم تلخيص البيانات المتحصل عليها أما فى صورة جداول أو رسومات بيانية .

2- التحليل الكمى والوصفى للبيانات وذلك باستخدام مختلف الطرق والأساليب الإحصائية الوصفية والكمية .

3- التفسير الإحصائى : وهو يقسم إلى نوعيين

(أ) الاستنباط أو التفسير التطبيقى : وهو مبنى على تفسير ظاهرة خاصة من قانون أو ظاهرة عامة أى التطبيق من العام إلى الخاص . فمثلاً فى قانون العرض نجد أنه فى سوق معينة وخلال فترة زمنية معينة فإن الكميات المعروضة تتناسب طردياً مع سعر الوحدة بافتراض ثبات العوامل الأخرى. فمثلاً إذا زاد سعر الأسماك فمن المتوقع زيادة الكميات المنتجة منها .

(ب) الاستقراء أو التفسير الاستنتاجى : وهو التوجيه من الخاص إلى العام. ويستخدم هذا التفسير الاستنتاجى بكثرة فى العلوم البحتة مثل الكيمياء والفيزياء حيث إنه يمكن التحكم فى جميع المتغيرات فيما عدا المتغير المراد دراسته ، أما فى العلوم البيولوجية مثل العلوم الزراعية والطبيعية فإن متغير الدراسة يكون عرضه للاختلاف والتغير والتأثر بالظروف البيئية المختلفة ولذلك فما هو صحيح بالنسبة للخاص قد لا يكون صحيحاً دائماً بالنسبة للعام .

علاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى :

يعتبر علم الإحصاء من العلوم الأساسية والذى يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالعلوم الأخرى مثل الإدارة والمحاسبة والرياضة والاقتصاد وبعض العلوم الطبيعية والكيميائية والوراثية وغير ذلك من العلوم، حيث يمكن التعرف على خصائص تلك العلوم السابق ذكرها بمساعدة علم الإحصاء، حيث الإحصاء بفروعه المختلفة وتطورها أصبح الوسيلة القادرة على جمع البيانات وتبويبها وتحليلها وفقاً للمقاييس الإحصائية

المناسبة واستخلاص النتائج المؤثرة على العوامل موضوع الدراسة والبحث حتى يمكن معرفة العلاقة بين هذه العوامل والاستفادة منها فى البحث العلمى . ويتم ذلك من خلال العلاقة الوطيدة والتعاون بين المختصين بعلم الإحصاء والمختصين بالعلوم الأخرى حيث من خلال تعاونهم هذا اقتراح الوسائل والأساليب التى تفيد فى تطوير وتحسين علم الإحصاء والعلوم الأخرى . وعلى سبيل المثال من خلال التعاون بين علماء الإحصاء والرياضة والاقتصاد تم معرفة علم الاقتصاد القياسى Econometrics.

(1) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الاقتصاد :

الإحصاء بطرقة وأساليبه المختلفة يساعد فى شرح كثير من الحقائق والنظريات الاقتصادية التى تم استنباطها بأسلوب الاستنتاج المنطقى، كما يمكن استخدام تلك الأساليب الإحصائية فى تقدير النماذج الاقتصادية المختلفة مع مراعاة فروض النظرية الاقتصادية. ومن خلال علم الإحصاء يمكن الحكم على معنوية معلمات النماذج الاقتصادية التى يتم دراستها. هذا بالإضافة إلى أن علم الاقتصاد باعتباره أحد العلوم الاجتماعية التى تدرس سلوك الأفراد كمستهلكين وكمنتجين وتجار فهو يحتاج إلى جمع بيانات خاصة بالإنتاج والاستهلاك والتجارة وغيره سواء باستخدام العينات أو دراسة المجتمع بأكمله ثم تحليل هذه البيانات للوصول إلى النتائج المرغوبة وهذا كله يتم بالتعاون مع علم الإحصاء من خلال استخدام الأساليب الإحصائية اللازمة للدراسة .

(2) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة :

إن أهم ما يميز المدير الناجح هو القدرة على اتخاذ القرار المناسب فى الوقت المناسب وهو فى ذلك يحتاج إلى مجموعة من الأساليب الإحصائية الكمية التى تساعده فى دراسة كل ما يتعلق بالظاهرة موضوع الدراسة وإيجاد الحلول المناسبة لها فى الوقت الأمثل . وتلعب بحوث العمليات دوراً أساسياً فى اتخاذ القرارات الإدارية، كما تلعب نظرية المعاينة وهى أحد الأساليب الإحصائية دوراً هاماً فى كيفية التعامل مع العاملين فى مجال الإدارة من خلال عمليات الاستقصاء الميدانى . وباستخدام هذه المعلومات الكمية المتوافرة حول أية سياسة إدارية وبمساعدة الأساليب الإحصائية يمكن الوصول إلى قرارات إدارية هامة تفيد العاملين فى مجال الإدارة . فمثلاً القرارات الخاصة بتحديد المخزون وسياساته ومعدلات دوران رأس المال كلها أشياء لا يمكن معرفة تحديدها كمياً إلا بمساعدة الأساليب الإحصائية مثل تحليل الانحدار بشقيه البسيط والمتعدد وتقدير معدلات النمو وتقدير المعادلات باستخدام النماذج الإحصائية، ومن هنا تظهر العلاقة الوطيدة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة .

(3) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم المحاسبة :

الإحصاء أداه هامة لعلم المحاسبة حيث تعتمد عمليات مراجعة السجلات والدفاتر المحاسبية على اختيار عينة من المستندات تكون ممثله لجميع المستندات، وذلك أسلوب إحصائى له قواعده الخاصة به وعلى المحاسب القدير أن يراعى قواعد وشروط اختيار العينة . كما تستخدم المحاسبة أيضاً التوزيعات الإحصائية وطرق التقدير والاستدلال

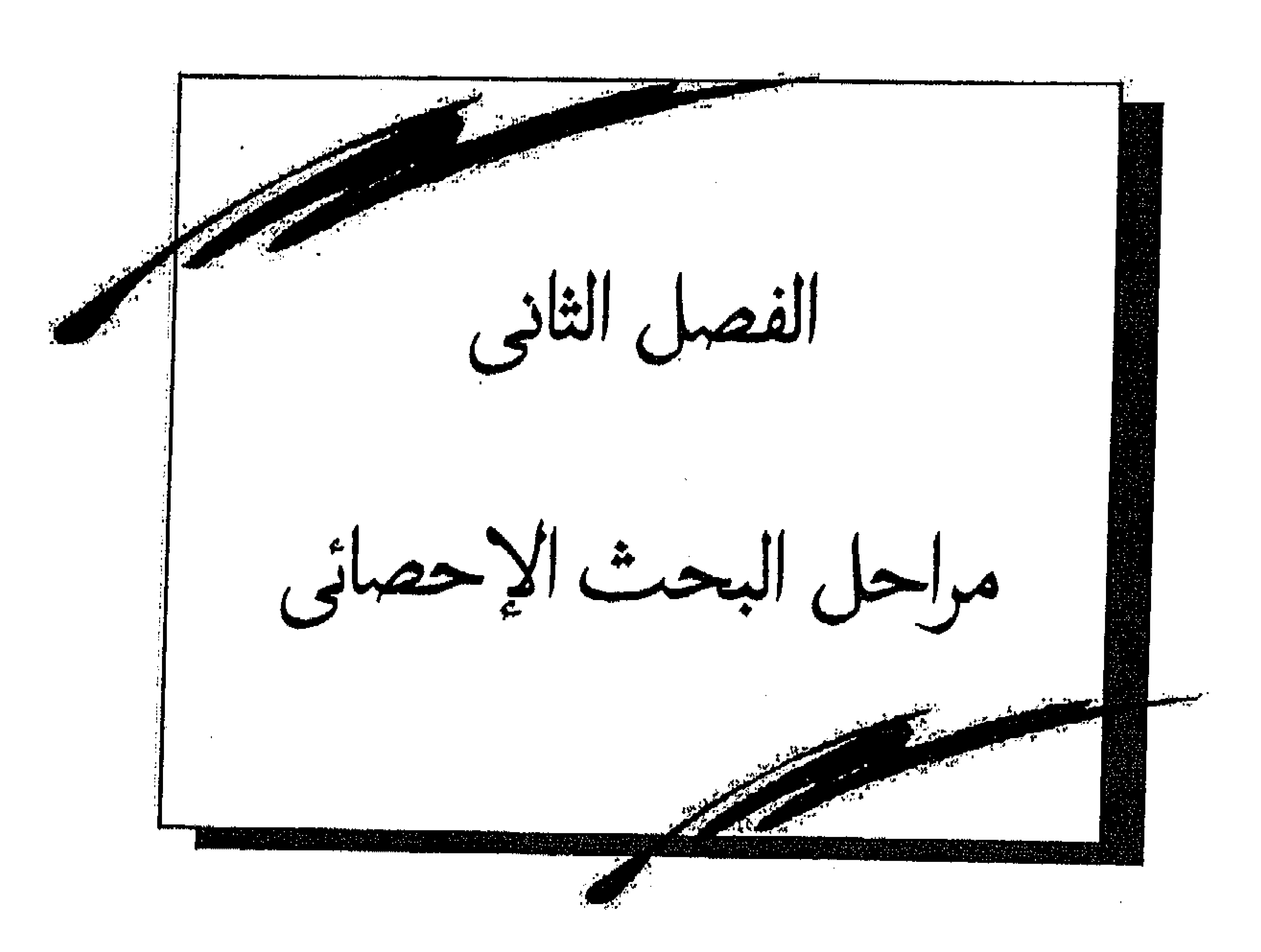
الإحصائى فى عمليات التنبؤ بفشل أو نجاح المشروعات من خلال التنبؤ بأسعار الأسهم والأرباح .

(4) العلاقة بين علم الإحصاء والرياضة :

تعتمد الإحصاء على الأدوات الرياضية سواء مثل الجبر أو غيره فى حساب المقاييس الإحصائية بالإضافة إلى الإثباتات النظرية اللازمة، خصوصاً فى مجال الإحصاء الرياضى، فالشخص الذى لديه معلومات رياضية يكون أقدر من غيرة فى التعامل مع الإحصاء والتعمق فيها والعمل على تطويرها . كما تحتاج الرياضيات إلى الأدوات الإحصائية فى كثير من الأمور مثل استخدام النظريات الرياضية وتطويرها لتلائم واقع الحياة العملية .

(5) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الرياضة وعلم الاقتصاد :

كما ذكر سابقا نتيجة للتعاون الوثيق بين الرياضة والإحصاء والاقتصاد أمكن الوصول إلى علم حديث يسمى علم الاقتصاد القياسى Econometrics وهو مزيج بين الثلاثة فروع المختلفة من العلم وهذا العلم ساعد كثيراً فى تطوير علم الاقتصاد من علم بحت إلى علم تطبيقى ساعد كثيراً على إيجاد حلول لبعض المشاكل الاقتصادية .



الفصل الثانى

مراحل البحث الإحصائى

يتعين على الباحث عند عمل بحث معين إجراء خطوات رئيسية لدراسة تأثير عامل أو عدة عوامل على ظاهرة معينة وعلاقة ذلك بالظواهر الأخرى .

ويمكن تلخيص خطوات أو مراحل البحث الإحصائى فى الآتى :

(1) تحديد الهدف من البحث أو وضع الفروض الإحصائية :

يقصد بالفرض الإحصائى بأنه تفسير مبدئى للظاهرة موضوع الدراسة ، ويحتاج الفرض إلى بيانات يتم جمعها وتحليلها وفى ذلك يقرر الباحث إما قبول الفرض أو رفضه وبدأ البحث عن الفرض البديل فى ضوء البيانات المتاحة للباحث والتى تم جمعها عن الظاهرة موضوع الدراسة . ومن خلال الفروض يتم تحديد الهدف من الدراسة وتحديد الجداول الإحصائية اللازمة حيث ذلك يساعد الباحث على تحديد البيانات اللازم جمعها .

(2) تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه :

يقصد بالمجتمع مجموع المفردات التى يتم جمع البيانات عنها. والمفردات التى تمثل وحدة جمع البيانات فمثلاً مجموع وثائق التأمين على الحياة بكافة أنواعه تمثل المجتمع موضوع الدراسة وكل وثيقة تأمين تمثل وحدة مجتمع الدراسة .

(3) تحديد مصادر البيانات :

هناك نوعين من مصادر البيانات منها :

(أ) مصادر ثانوية : وهى بيانات سبق جمعها وحفظها ونشرها فى سجلات مثل نشرات الاقتصاد الزراعي التي يصدرها معهد بحوث

الإقتصاد الزراعي بوزارة الزراعة وإستصلاح الأراضي قطاع الشئون الإقتصادية، والنشرات الإحصائية التي يصدرها الجهاز المركزي للتعبئة العامة والإحصاء ، ومنظمة الأغذية والزراعة (الفاو) وهذه البيانات تتعلق بالظاهرة موضوع الدراسة سواء كانت بيانات عن المساحة الزراعية أو الإنتاج الزراعي أو الدخل الزراعي أو عدد السكان أو الدخل القومى أو الإنتاج القومى أو الاستهلاك القومى وغير ذلك من البيانات .

(ب) **مصادر أولية وميدانية** : ويقصد بها جمع البيانات من مصادرها الأصلية وذلك بأحد الطرق المتعارف عليها سواء عن طريق المقابلة الشخصية أو بالبريد أو التليفون أو الفاكس أو عن طريق الإنترنت وهى أحدث طرق جمع البيانات .

(4) التجهيز لعملية جمع البيانات الميدانية :

ويتطلب ذلك عدة مراحل منها :

(أ) **تصميم استمارة جمع البيانات** : وهى ما تعرف باستمارة الاستبيان ويجب أن يراعى فيها الآتى :

1- أن تكون أسئلة الاستمارة معبرة عن جميع البيانات المطلوب جمعها واللازمة للدراسة .

2- يراعى فيها التسلسل المنطقى وصياغة الأسئلة بطريقة سهلة ويفهمها المبحوث.

3- وضع الأسئلة بحيث تكون الإجابة عليها بنعم أو لا أو يعبر عنها بصورة رقمية.

4- لا تسبب الأسئلة أى حرج للمبحوث .

5- أن يقر الباحث بأن الأسئلة الموجودة باستمارة الاستبيان سرية ولأغراض البحث العلمى فقط .

(ب) تحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات : يوجد أسلوبان لجمع البيانات هما :

1- **الحصر الشامل:** وفيه يتم جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع موضوع الدراسة .

2- **العينة :** وفيه يتم جمع البيانات من بعض مفردات المجتمع .

وتوجد عدة اعتبارات لتحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات نذكر منها :

- **نوع المجتمع :** فإذا كان المجتمع محدوداً ويمكن حصر مفرداته فيتم اللجوء إلى استخدام الحصر الشامل لمفردات المجتمع. أما إذا كان المجتمع غير محدود ويصعب حصر مفرداته فيتم اللجوء إلى استخدام أسلوب العينة .

- **طبيعة الظاهرة موضوع الدراسة :** إذا كانت الظاهرة عرضه للفساد أو التلف مثل عمل التجارب على الأسماك أو الخضر أو الفاكهة فيلزم استخدام أسلوب العينة.

- **الوقت :** يحتاج أسلوب الحصر الشامل إلى وقت كبير بالمقارنة بأسلوب العينة فإذا كان الباحث يريد الحصول على نتائج بسرعة فيستخدم أسلوب العينة .

- الإمكانيات المادية للباحث : أسلوب الحصر الشامل يحتاج إلى موارد مادية كبيرة بالمقارنة بأسلوب العينة .

- إعداد القائمين بجمع البيانات : تحديد واجبات واختصاصات كل منهم للحصول على البيانات على أكمل وجه .

- تهيئة المجتمع للعملية الميدانية الخاصة بجمع البيانات : حيث يتم الإعلان عن طريق أحد وسائل الإعلام المختلفة مثل الإذاعة والتليفزيون والصحف والمجلات ، حتى يكسب ثقة أفراد المجتمع للحصول على بيانات صحيحة .

(5) تصنيف وتجهيز البيانات :

بعد الانتهاء من جمع البيانات من خلال استمارة الاستبيان يتم عمل الجداول الإحصائية المناسبة لتفريغ البيانات وتجهيزها للتحليل الإحصائى ، **ويتم ذلك من خلال الخطوات الآتية:**

- مراجعة استمارة الاستبيان للتأكد من أن جميع الأسئلة قد تم الإجابة عليها بطريقة صحيحة وواضحة .

- فرز وتبويب البيانات من خلال استخراج الجداول الإحصائية .

(6) عرض البيانات وتحليلها إحصائياً :

- التمثيل البيانى للبيانات باستخدام الأعمدة أو الخطوط المنكسرة أو الدائرة .

- تلخيص البيانات فى صورة مقاييس إحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت .

- إجراء بعض الاختبارات الإحصائية للوصول إلى قرار برفض أو قبول الفرض الإحصائى الذى إفترضه الباحث كتفسير مبدئى للظاهرة موضع الدراسة .

العينات Samples

العينة جزء من المجتمع يتم اختيارها بطريقة عشوائية وغير متحيزة لكى يتم دراستها للتعرف على خصائص المجتمع الذى سحبت منه العينة. **ويتميز أسلوب العينة بعدد من المميزات منها :**

1- يعطى نتائج سريعة بسبب سرعة الحصول على البيانات وتحليلها .

2- توفر الوقت والجهد والتكاليف .

3- فى بعض البحوث تعتبر العينات الأسلوب الإحصائى الوحيد مثل عمل تجارب دواء جديد على بعض الحيوانات وغيره من الأمثلة العديدة .

ولسحب عينة يجب أن يتوافر الآتى :

1- الوضوح فى تعريف المجتمع .

2- عدم التكرار لأى مفردة من مفردات المجتمع .

3- أن تكون العينة بدرجة كبيرة لكى تشمل كل أفراد المجتمع .

4- أن يكون اختيار العينة عشوائياً بمعنى أن تتاح لكل فرد من أفراد المجتمع فرصة الاختيار فى العينة .

أنواع العينات :

تختلف أنواع العينات تبعاً لاختلاف خصائص المجتمع المراد دراسته . ويمكن تقسيم العينات بصفة عامة إلى :

أولاً : العينات الاحتمالية Probability Samples

ويمكن تعريفها بأنها العينات التى يتم اختيار مفرداتها بأسلوب يوفر لكل وحدة من وحدات المعاينة بمجتمع الدراسة احتمالاً ثابتاً ومحدداً لاختيار العينة بحيث لا يتدخل الباحث فى عملية الاختيار بل يتم عشوائياً ، ويمكن من خلال العينات الاحتمالية حساب أخطاء المعاينة وكذلك الاستدلال الإحصائى وتعميم النتائج . وتقسم العينات الاحتمالية إلى:

(أ) العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample:

وهذا النوع من العينات من أبسط أنواعها ويقصد بالعشوائية بأنه يكون لكل فرد من مفردات المجتمع نفس فرصة الاختيار ضمن العينة. وتتم عملية الاختيار بأن توضع لكل مفردة رقم معين وتخلط الأرقام مع بعضها خلطاً جيداً ثم يتم سحب عدد مفردات العينة بطريقة عشوائية بطريقة السلة أو بطريقة جداول الأرقام العشوائية أو باستخدام الحاسب الآلى .

وتعتبر العينة العشوائية البسيطة سهله الاختيار فى حالة المجتمعات الصغيرة ويصعب استخدامها فى المجتمعات الطبقية حيث لا تضمن تمثيل كل طبقة من هذه الطبقات بنفس نسبتها فى المجتمع .

(ب) العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

يمكن تلخيص خطوات سحب العينة العشوائية المنتظمة فى تقسيم المجتمع إلى عدد من الفئات المتساوية الطول ثم يتم اختيار مفردة عشوائية من المجموعة الأولى ونحدد ترتيبها فى المجموعة ثم نحصل على

بقية المفردات بإضافة طول الفئة على التوالى . وذلك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : المطلوب اختيار عينة عشوائية منتظمة عدد مفرداتها يساوى (10) مفردات من بين مجتمع عدد مفرداته (200) مفردة .

الحل : يوجد لدينا 200 مفردة يتم تقسيمها إلى 10 فئات، طول الفئة يساوى 20 كالآتى :

20 – 1
40 – 20
60 – 40
:
:
:
200 – 180

ثم نقوم باختيار مفردة واحدة من المجموعة الأولى بطريقة عشوائية بفرض اختيار الرقم (6) ثم نقوم بتحديد باقى مفردات العينة بإضافة طول الفئة(20) على الرقم (6) فنحصل على 10 مفردات بالأرقام 6 ، 26 ، 46 ، 66 ، 86 ، 106 ، 126 ، 146 ، 166 ، 186 وهذه الأرقام تمثل مفردات العينة المأخوذة من المجتمع المكون من 200 مفردة .

ويلاحظ أن هذا الأسلوب فى اختيار العينات يحتاج إلى تكاليف وجهد أقل من العينة العشوائية البسيطة السابق ذكرها .

وتتميز بالآتى :

1– عنصر العشوائية المتمثل فى اختيار المفردة .

2- عنصر الانتظام المتمثل فى اختيار باقى المفردات .

(جـ) العينة الطبقية Layer Sample

وفقاً لهذا الأسلوب يتم تقسيم المجتمع إلى طبقات متجانسة ثم اختيار عدد من المفردات من كل طبقة ليكون حجم العينة الكلى مكون من عدد من المفردات من كل طبقة ككل . وتمثل العينة فى هذه الحالة المجتمع تمثيلاً دقيقاً لأنها تأخذ فى الاعتبار جميع الطبقات وفقاً لحجم كل منها .

(ء) العينة متعددة المراحل Multi- Stage Sample

يتم اختيار العينة وفقاً لهذا الأسلوب على عدة مراحل، ويستخدم هذا النوع من العينات فى حالة ما إذا كان حجم المجتمع كبير جداً ويتكون من أقسام غير متجانسة فيما بينها ، فيتم اختيار عينة عشوائية من هذه الأقسام ، وقد يكون كل قسم مقسم إلى أقسام فيتم اختيار عينة عشوائية من كل منها وهكذا. فمثلاً عند دراسة تصنيف الأراضى الزراعية فى جمهورية مصر العربية يتم اختيار عدد من محافظات الجمهورية ويتم اختيار عدد من المراكز داخل كل محافظة ثم يتم عدد من القرى داخل كل مركز ليتم دراسة التصنيف .

ثانياً : العينات غير الاحتمالية Non Probability Samples

تعرف العينة غير الاحتمالية بأنها التى يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير طريقة الاحتمالات ، حيث يتعمد الباحث اختيار مفردات معينة، ولذلك تعرف فى بعض الأحيان بأنها العينة العمدية . وفى العينات غير الاحتمالية لا يمكن حساب أخطاء المعاينة أو الاستدلال الإحصائى أو تعميم النتائج . ومن أهم أنواع العينات غير الاحتمالية عينة الحصص وتستخدم غالباً فى دراسات السوق والرأى العام ، وفيها يتم تحديد

حصص معينة تمثل مجتمع الدراسة تمثيلاً نسبياً ، ويعتمد تحديد الحصص على التقدير الشخصى وخبرة الباحث ، ويتم اختيار مفردات العينة من داخل كل قسم بطريقة عمدية أو غير عشوائية .

أسئلــة

1- أذكر تعريفاً مناسباً لعلم الإحصاء ؟

2- أذكر أهم خصائص ووظائف الإحصاء ؟

3- تكلم باختصار عن مراحل أو خطوات البحث العلمى ؟

4- ما هو المقصود بالعينة موضحاً أنواع العينات ؟

أنـواع الأخطـاء :

قـد يقـع الباحـث فـى خطـأ عنـد جمـع البيانـات ، فمـثلاً جمـع البيانات عن طريق أسلوب العينة قد يؤدى إلى الوقوع فى خطأ يسمى بخطأ المعاينة . وهناك أخطاء يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة وتسمى بأخطاء التحيز .

أولاً : أخطاء المعاينة :

وتنشأ هذه الأخطاء نتيجة لعوامل الصدفة البحتة نظراً لاختلاف أسلوب العينة عن نتائج أسلوب الحصر الشامل .

ويمكن قياس أخطاء المعاينة كمياً ومن ثم يمكن تقديرها . وتقل أخطاء المعاينة كلما زاد حجم العينة .

ثانياً : أخطاء التحيز :

وهى الأخطاء التى يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة خلال جميع مراحل البحث ومن أمثلتها :

- عدم تحديد المشكلة تحديداً دقيقاً .
- الحصول على بيانات غير دقيقة فى جمع البيانات نتيجة لاعتماد الباحث على مصادر غير موثوق فيها .
- عدم صياغة الأسئلة فى استمارة البحث بطريقة سليمة مما يترتب عليه جمع بيانات خطأ .
- أخطاء فى فرز وتبويب البيانات .
- أخطاء فى استخدام المقاييس الإحصائية المناسبة .

تبويب وعرض البيانات الإحصائية

فى كثير من الأحيان تكون البيانات التى قام الباحث بجمعها كبيرة لدرجة تعذر استخلاص حقائق معينة منها. لذا يقوم الباحث بترتيبها وعرضها بطريقة منتظمة تساعده على توضيح أهميتها والتعرف على خواصها وسهولة تحليلها إحصائياً . وهناك عدة طرق مختلفة لعرض البيانات من أهمها العرض الجدولى والعرض البيانى .

أولاً : العرض الجدولى :

يتم عرض بيانات الظاهرة موضوع الدراسة فى جدول، وقد يكون هذا الجدول بسيط بحيث يتم فيه عرض ظاهرة واحدة فقط أو جدول مزدوج ويعرض فيه ظاهرتين أو جدول مركب لأكثر من ظاهرة .

وتقسم الجداول الإحصائية من حيث أغراضها إلى الآتى :

(1) جداول عامة :

وهى عبارة عن الجداول التى يكتفى بتفريغ البيانات فيها دون الحاجة إلى تحليلها مثل بيانات التعداد السكانى من مواليد أو التركيب السكانى (ذكور و إناث) أو حجم الإنتاج الصناعى أو الزراعى وهكذا ... ويكون الغرض من الجداول العامة هو الاستفادة منها كمصدر للبيانات للاستفادة منها عند عمل الجداول الخاصة.

(2) جداول خاصة :

وتستخلص بياناتها من الجداول العامة ويعاد ترتيب تلك البيانات فى جداول خاصة بغرض إجراء بحث معين لإبراز أهمية الظاهرة موضوع الدراسة بصورة بسيطة وواضحة .

(3) جدول التوزيع التكرارى :

إن أول خطوة يقوم بها الباحث لتخليص البيانات وتبسيطها تمهيداً لتحليلها بالأساليب الإحصائية المختلفة هو إعداد الجداول التكرارية . وفيها يتم تجميع البيانات المتشابهة مع بعضها فى مجموعات ووضع كل مفردة فى المجموعة التى تنتمى إليها ، وبذلك نحصل على التكرارات المناظرة لكل فئة . ولذلك فإن جدول التوزيع التكرارى يتكون من عمودين أحدهما للفئات والآخر للتكرار . ويمكن توضيح ذلك من المثال التالى :

مثال : عند عمل الاختبار الشخصى لـ50 طالب وطالبه تمهيداً لالتحاقهم بشعبة الإعلام بكلية الآداب حصلنا على الدرجات الآتية (الدرجة من 100) .

62	41	55	67	85
87	79	48	78	42
67	49	82	36	45
59	57	58	62	25
69	90	63	46	47
68	72	48	12	83
66	46	77	58	22
85	48	38	27	62
85	83	27	67	94
88	32	69	43	66

المطلوب عمل جدول تكرارى لهذه البيانات.

خطوات الحل :

1- نعين المدى Range وهو يمثل الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة فى البيانات المعطاه وعليه فإن المدى = 94 – 12 = 82

2- نعين عدد الأقسام أو عدد الفئات وفقاً لمعادلة يول Yule

عدد الفئات = $2.5 \sqrt[4]{ن}$ حيث ن = عدد القيم

= $2.5 \sqrt[4]{50}$ = 7 تقريباً

ويفضل ألا يقل عدد الفئات عن 3 ولا يزيد عن 20 فئة

3- نعين طول الفئة = المدى ÷ عدد الفئات

= 82 ÷ 7 = 12 تقريباً

4- نعين حدود الفئات : بالنسبة للحد الأدنى للفئة الأولى يجب أن يكون أقل بمقدار واحد عن أقل رقم فى البيانات. وبالنسبة للفئة الأخيرة يجب أن يكون الحد الأعلى لها أكبر من أكبر رقم فى البيانات ولو بمقدار واحد .

5- تكوين العلامات .

6- نعين مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة}}{2}$

7- نحسب التكرار النسبى وهو ناتج من قسمة تكرار كل فئة على مجموع التكرارات الكلية . ويجب أن يكون مجموع التكرارات النسبية مساوياً للواحد الصحيح .

جدول التوزيع التكرارى

الفئات	العلامات	التكرار	التكرار النسبى ٪	مركز الفئة
23-11	1 1	2	0.04	17
35-23	1 1 1	3	0.06	29
47-35	~~1111~~ 111	8	0.16	41
59-47	~~1111~~ ~~1111~~	9	0.18	53
71-59	~~1111~~ ~~1111~~ 11	12	0.24	65
83-71	1111	4	0.08	77
95-83	~~1111~~ ~~1111~~ 11	12	0.24	89
المجموع		50	1.00	

ويلاحظ أن الفئة 11-23 تقرأ من 11 إلى أقل من 23 ولا يصح تقسيم الفئات كالآتى :

11-23 ، 24-36 حيث الرقم 23.5 لا يوجد ضمن أى من الفئتين .

كما قد تكتب الفئات هكذا

-11

-23

-35 وهكذا

وذلك على اعتبار أن بداية كل فئة هى نهاية الفئة السابقة لها مباشرة.

ويلاحظ أن الجدول التكرارى السابق يسمى جدول منتظم لأن أطوال الفئات متساوية ومغلق لأن الحد الأعلى للفئة الأخيرة معلوم .

ولكن قد توجد بعض الجداول التكرارية غير المنتظمة والمفتوحة ومثال ذلك الجدول التكرارى التالى :

الفئات	-30	-40	-60	-90	-100	-130
التكرار	4	8	12	6	5	2

وقد تكون بعض الجداول التكرارية غير منتظمة (أى أطوال فئاتها غير متساوية) ومغلقة (أى الحد الأعلى لأخر فئة معلوم) وذلك مثل الجدول التكرارى التالى :

الفئات	-10	-30	-80	-100	200-120
التكرار	10	18	30	15	6

كما أن هناك الجداول التكرارية المزدوجة وهى التى يرصد فيها بيان عن ظاهرتين مختلفتين مثل تقديرات مجموعة من الطلبة فى مادتى الإحصاء والرياضة كالتالى :

الرياضة الإحصاء	ممتاز	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف	المجموع
ممتاز	3	4				7
جيد جداً	6	2	5	1		13
جيد	2		3		1	6
مقبول		3		3	2	5
ضعيف						4
المجموع	11	9	8	4	3	35

الجداول التكرارية المتجمعة :

يوجد نوعان من الجداول التكرارية المتجمعة هما الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع الهابط .

أولاً التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد :

ويكون الغرض منه معرفة عدد المفردات أو القيم التى تقل عن قيمه معينه (أقل من بداية كل فئة) وقيمه أول تكرار متجمع صاعد تساوى صفر وأخر قيمه للتكرار المتجمع الصاعد تساوى مجموع التكرارات .

مثال : كون جدول تكرارى متجمع صاعد للجدول التكرارى التالى :

الفئات	-10	-20	-30	-40	-50	70-60	المجموع
التكرار	5	10	20	25	35	5	100

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الفئات	التكرار المتجمع
أقل من 10	0
أقل من 20	5
أقل من 30	15
أقل من 40	35
أقل من 50	60
أقل من 60	95
أقل من 70	100

جدول التكرار النسبى المتجمع الصاعد

الفئات	التكرار المتجمع النسبى
أقل من 10	0
أقل من 20	0.05
أقل من 30	0.15
أقل من 40	0.35
أقل من 50	0.60
أقل من 60	0.95
أقل من 70	1.00

ثانياً : التوزيع التكرارى المتجمع الهابط:

ويكون الغرض منه معرفة عدد القيم أو المفردات التي تزيد عن قيمه معينه. ويلاحظ أن الفئة الأولى من جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط تساوى مجموع التكرارات . بينما الفئة الأخيرة تكون مساوية للصفر وذلك عكس جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد . والمثال التالى يوضح ذلك :

مثال : المطلوب عمل الجدول التكرارى المتجمع الهابط من المثال السابق

الجدول التكرارى المتجمع الهابط

الفئات	التكرار المتجمع
10 فاكثر	100
20 فاكثر	95
30 فاكثر	85
40 فاكثر	65
50 فاكثر	40
60 فاكثر	5
70 فاكثر	0

جدول التكرار النسبى المتجمع الهابط

الفئات	التكرارالمتجمع النسبى
10 فاكثر	1.00
20 فاكثر	0.95
30 فاكثر	0.85
40 فاكثر	0.65
50 فاكثر	0.40
60 فاكثر	0.05
70 فاكثر	0

ثانياً : التمثيل البيانى :

تختلف طرق التمثيل البيانى باختلاف نوع البيانات ففى حالة البيانات الخام والمطلقة (غير المبوبة فى شكل جدول تكرارى) والتى **تشمل السلاسل الزمنية للظواهر المختلفة فتوجد عدة طرق لتمثيلها بيانياً منها :**

1- طريقة الخط البيانى .

2- طريقة الأعمدة .

3- طريقة الدوائر .

أما فى حالة البيانات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى فتوجد عدة طرق لتمثيلها بيانياً منها :

1- المدرج التكرارى.

2- المضلع التكرارى

3- المنحنى التكرارى.

4- المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

5- المنحنى التكرارى المتجمع الهابط

وسوف يتم تناول كل منها على حدة .

(1) الرسوم البيانية فى حالة القيم المطلقة غير المبوبة :

(أ) الخط البيانى :

وهو يمثل العلاقة بين متغيرين فإذا كان أحد المتغيرين هو الزمن فيمثل على المحور الأفقى وكان المتغير الآخر يمثل الظاهرة موضوع الدراسة فيوضع على المحور الرأسى . ويمكن المقارنة بين أكثر من ظاهرة باستخدام نفس الرسم البيانى .

مثال : الجدول التالى يوضح الأسعار المزرعية والأسعار التقديرية لمحصول القطن المصرى خلال الفترة 1985-1991 والمطلوب تمثيلها بيانياً بطريقة الخط البيانى .

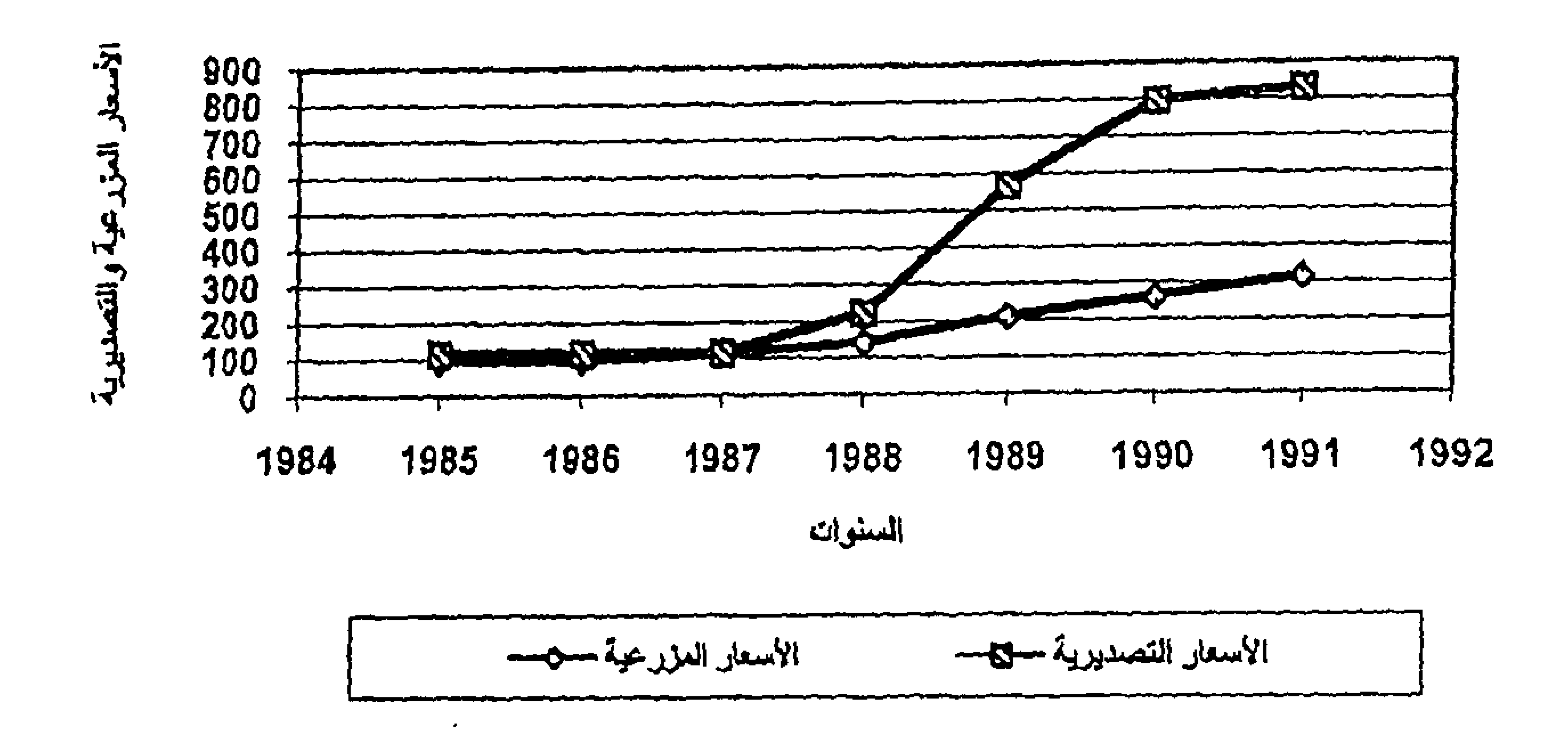
جدول (1) : تطور الأسعار المزرعية والتصديرية للقطن المصرى خلال الفترة 85-1991

(جنيه/ قنطار)

السنوات	الأسعار المزرعية	الأسعار التصديرية
1985	96.9	116.5
1986	97.1	118.7
1987	114.3	117.6
1988	143.5	222.9
1989	210.7	570.1
1990	262.7	797.4
1991	316.1	831.0

المصدر : الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، **النشرة السنوية للتجارة الخارجية** ، القاهرة ، أعداد متفرقة .

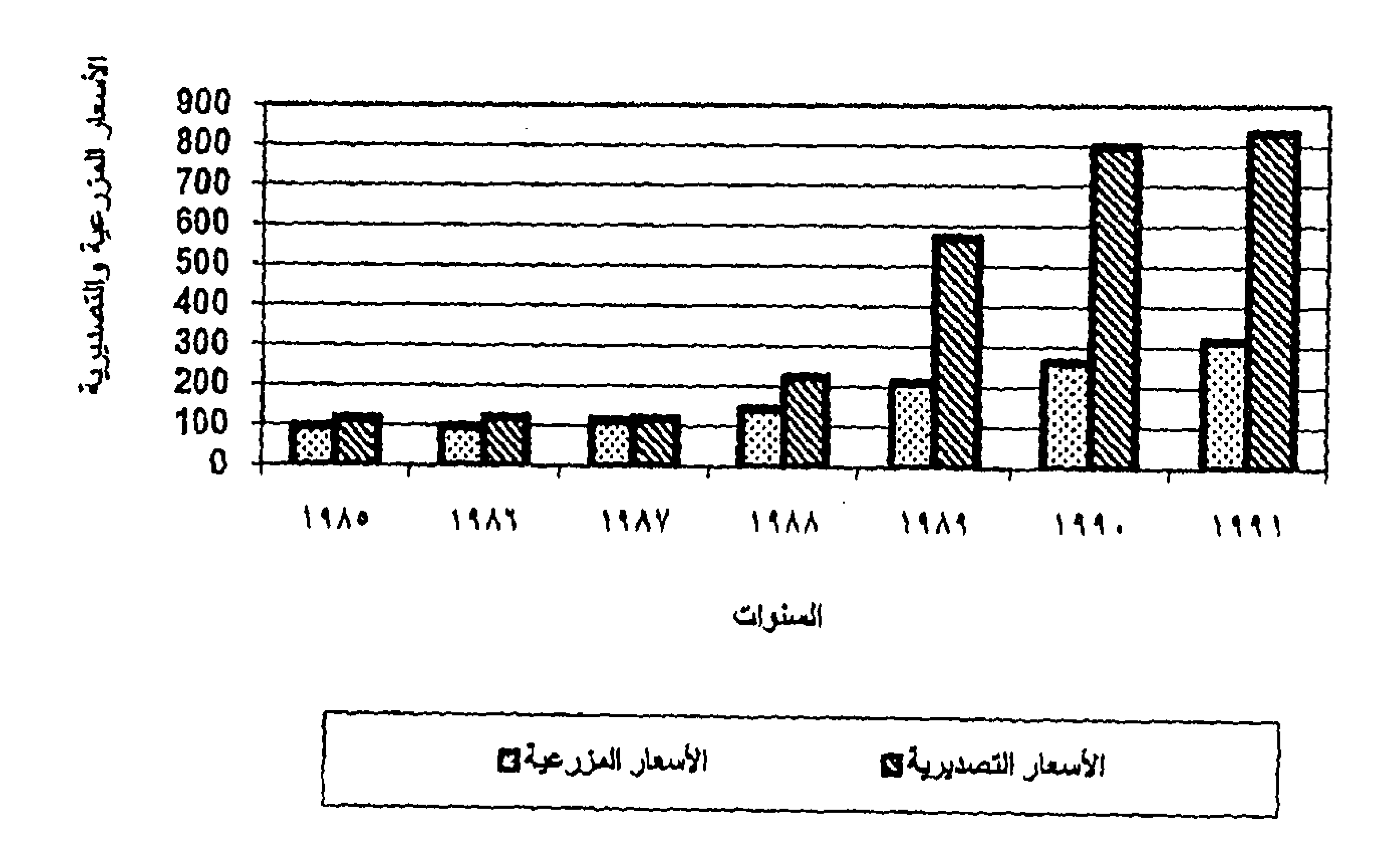
شكل (١) تطور الأسعار المزرعية والتصديرية لمحصول القطن المصرى



(ب) الأعمدة البيانية :

طريقة الأعمدة البيانية من أكثر الطرق انتشاراً لسهولة استخدامها ورسمها ووفقاً لهذه الطريقة تتناسب الأعمدة البيانية فى طولها مع الأعداد الممثلة لها بمعنى أن طول العمود يتناسب طردياً مع العدد الممثل له . والمثال التالى يوضح ذلك .


شكل (٢) تطور الأسعار المزرعية والتصديرية لمحصول القطن المصرى



مثال : استخدم بيانات المثال السابق لتمثيلها بطريقة الأعمدة

(جـ) طريقة الدائرة :

وفقاً لهذه الطريقة تقسم الدائرة إلى عدد من الأقسام بحيث تتناسب مساحة كل قسم مع أحد مكونات الظاهرة ويفضل إعطاء كل قسم لون مختلف عن الآخر لسهولة التمييز.

ويمكن تقسيم الدائرة إلى أقسام بمعلومية أن مجموع درجات الدائرة 360درجة ولإيجاد الزاوية المركزية لكل قسم أو جزء يتم وفقاً للقاعدة التالية :

$$\text{الزاوية المركزية} = \frac{\text{قيمة الجزء}}{\text{مجموع الأجزاء الكلية}} \times 360^{\circ}$$

والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال : الجدول التالى يوضح التوزيع الجغرافى للمتوسط السنوى للصادرات من محصول البطاطس خلال الفترة (87-1991)

جدول (2) : التوزيع الجغرافى لصادرات مصر من البطاطس خلال الفترة (87-1991) بالألف طن .

الدولة	متوسط الصادرات بالألف طن
إنجلترا	80
فرنسا	6
اليونان	12
السعودية	27
لبنان	9
دول أخرى	26
الجملة	160

المصدر : الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، **النشرة الشهرية للتجارة الخارجية** ، أعداد متفرقة.

الحل : نحصل أولاً على الزاوية المركزية لكل دولة

الزاوية المركزية لإنجلترا = $\frac{80}{160} \times {}^{o}360 = {}^{o}180$

الزاوية المركزية لفرنسا = $\frac{6}{160} \times {}^{o}360 = {}^{o}13.50$

الزاوية المركزية لليونان = $\frac{12}{160} \times {}^{o}360 = {}^{o}27$

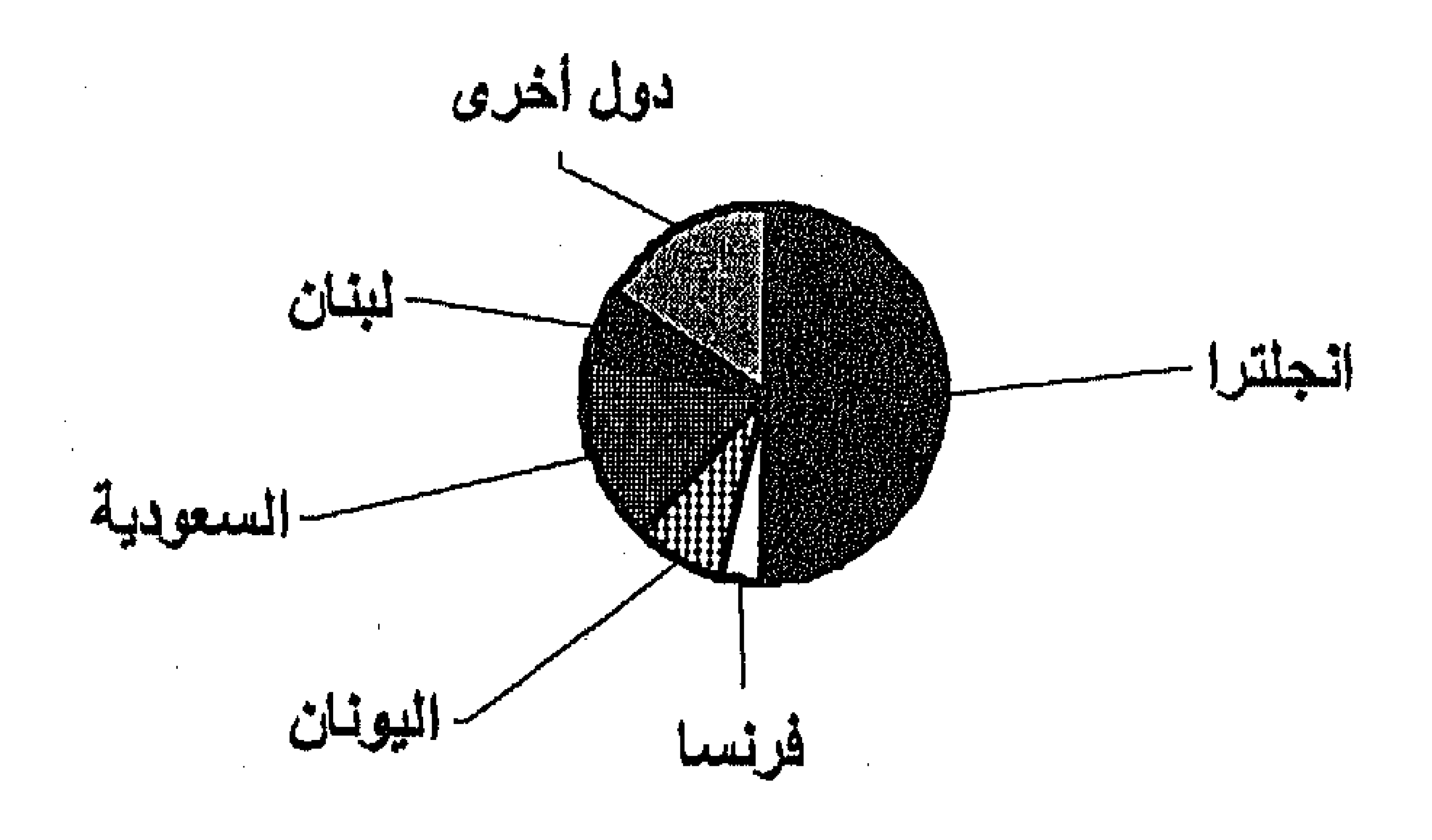
الزاوية المركزية للسعودية = $\frac{27}{160} \times {}^{o}360 = {}^{o}60.72$

الزاوية المركزية للبنان = $\frac{9}{160} \times {}^{o}360 = {}^{o}20.25$

الزاوية المركزية للدول ا لأخرى $\frac{9}{160} \times {}^{o}360 \quad {}^{o}58.50$

المجموع ${}^{o}360$

شكل (٣) توزيع الصادرات المصرية من البطاطس على أهم الدول المستوردة لها



(2) الرسومات البيانية فى حالة البيانات المبوبة :

1- المدرج التكرارى Histogram

وهو عبارة عن مجموعة من المستطيلات المتلاصقة تمثل قاعدتها طول الفئة وارتفاعها تمثل تكرار الفئة.

(أ) المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى المنتظم :

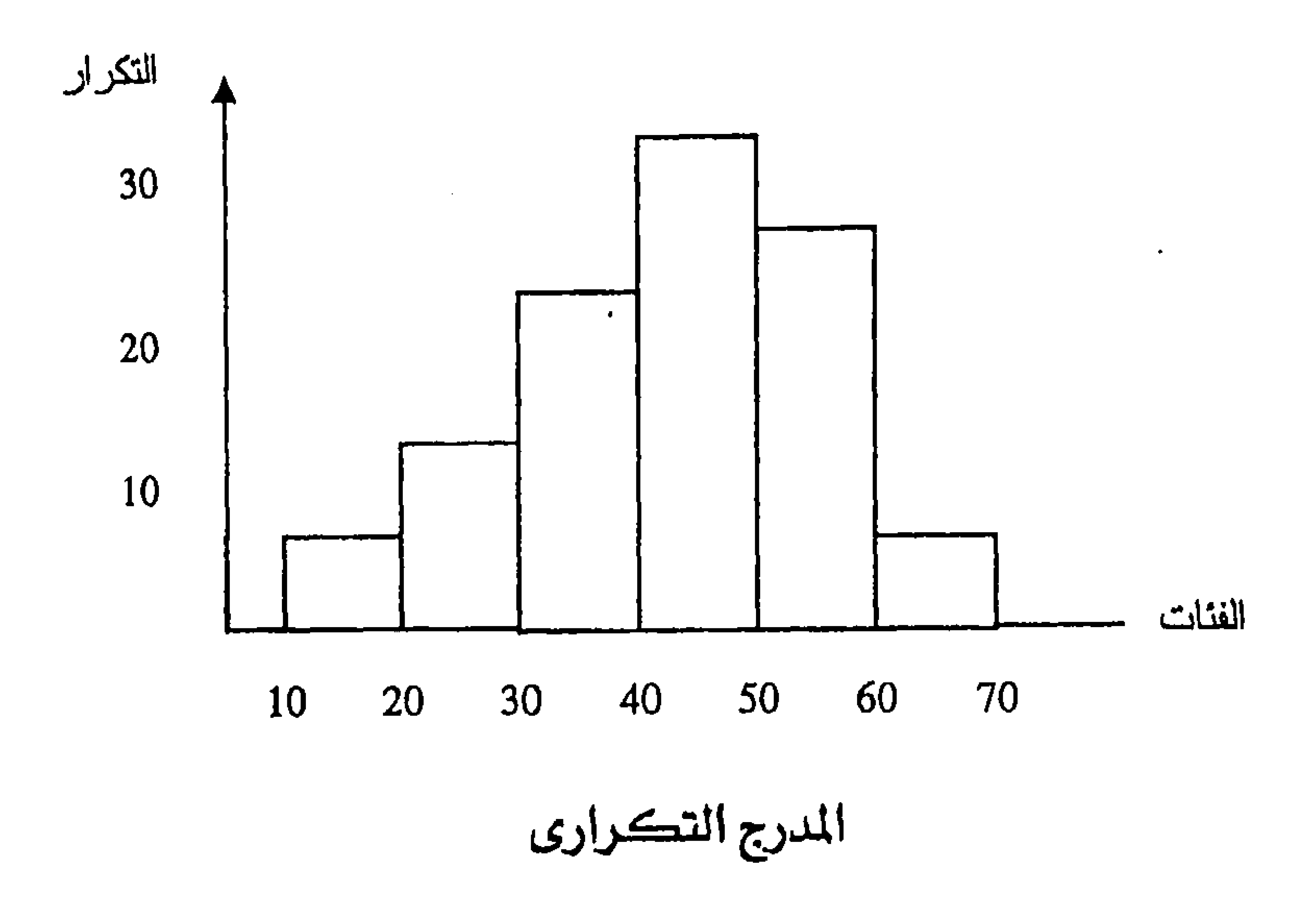
يقصد بالتوزيع التكرارى المنتظم بأنه أطوال فئاته متساوية . ولرسم المدرج التكرارى من التوزيع التكرارى المنتظم يتم اتباع الخطوات التالية :

- رسم محورين متعامدين أحدهما يمثل المحور الأفقى وتوضع عليه الفئات والآخر يمثل المحور الرأسى وتوضع عليه التكرارات .
- نحدد مقياس الرسم المناسب لمحور التكرارات .
- وضع الحدود الدنيا لكل فئة على المحور الأفقى بالإضافة إلى الحد الأعلى لآخر فئة .
- تمثل كل فئة مستطيل يتناسب ارتفاعه مع تكرار الفئة وبحيث تكون جميع المستطيلات متلاصقة .

مثال : ارسم المدرج التكرارى من الجدول التالى :

الفئات	10-	20-	30-	40-	50-	70-60	المجموع
التكرار	5	10	20	35	25	5	100

الحل : باتباع الخطوات السابقة لرسم المدرج التكرارى يمكن الحصول على الرسم التالى :



المدرج التكرارى

ويلاحظ على المدرج التكرارى الآتى :

- ارتفاع المستطيلات هو أساس المقارنة طالما أن أطوال الفئات متساوية.
- فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة يتبع نفس خطوات الرسم مع إهمال الفئات المفتوحة .

(ب) المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى غير المنتظم :

فى هذه الطريقة تكون الفئات غير متساوية ولا تعبر الارتفاعات عن التكرارات، ولذلك يلزم قبل البدء فى الرسم الحصول على التكرارات المعدلة . والتكرار المعدل يساوى التكرار الأصلى مقسوماً على طول الفئة .

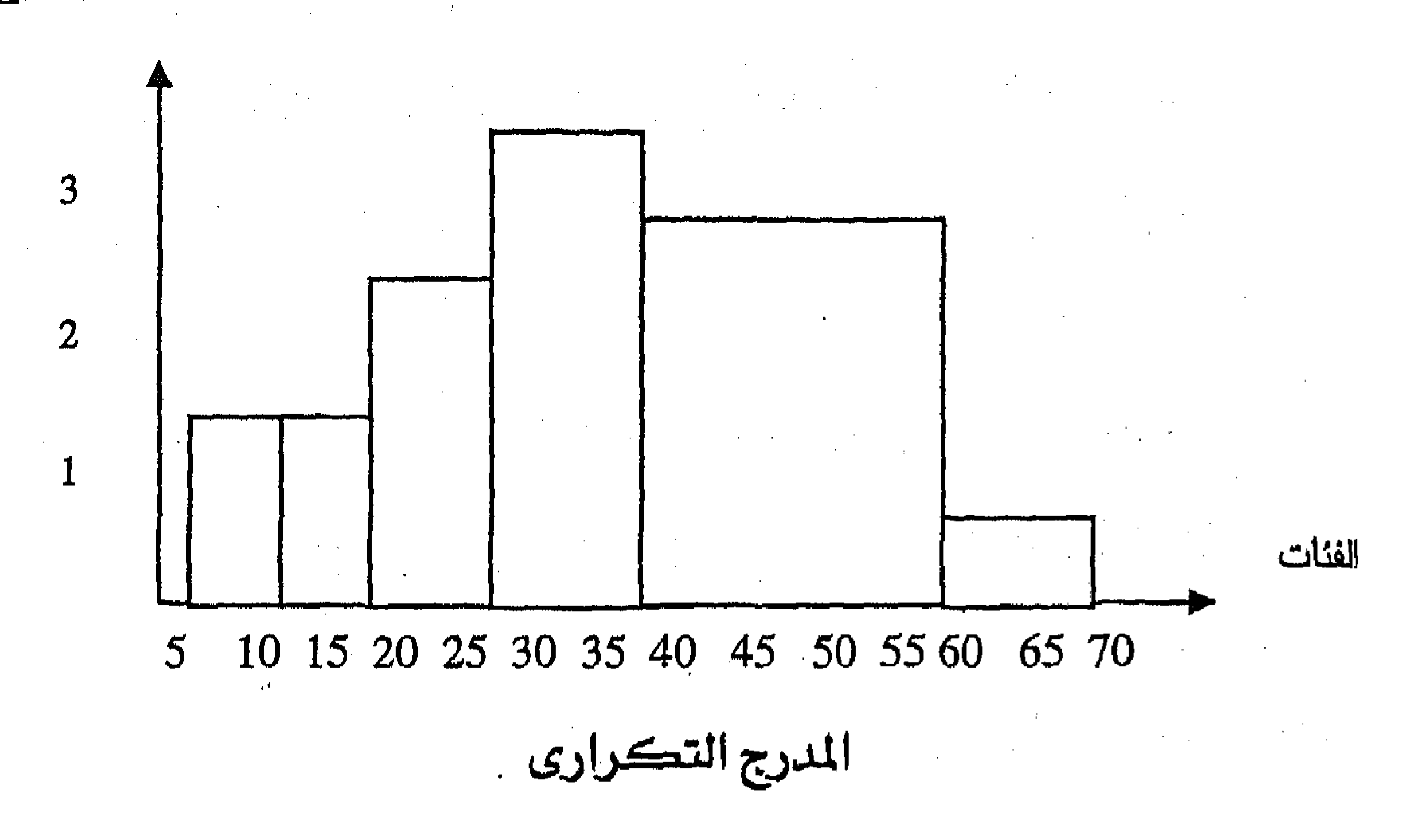
مثال : ارسم المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى الآتى :

الفئات	5-	10-	20-	30-	40-	70-60	المجموع
التكرار	5	10	20	35	25	5	100

الحل : التكرار المعدل = التكرار الأصلى للفئة ÷ طول الفئة

التكرار المعدل	طول الفئة	التكرار الأصلى	الفئات
1	5	5	-5
1	10	10	-10
2	10	20	-20
3.5	10	35	-30
1.25	20	25	-40
.5	10	5	70-60
		100	المجموع

ثم نقوم برسم المدرج التكرارى باتباع نفس الخطوات السابقة .



المدرج التكرارى .

2- المضلع التكرارى:

وهو عبارة عن الخط المنكسر الواصل بين مراكز الفئات . أو الخط الواصل بين منتصف القمم العليا للمدرج التكرارى . ويمكن رسمه من خلال :

(أ) المدرج التكرارى (ب) استخدام مراكز الفئات

خطوات رسم المضلع التكرارى من المدرج التكرارى :

1- يتم رسم المدرج التكرارى كما سبق .

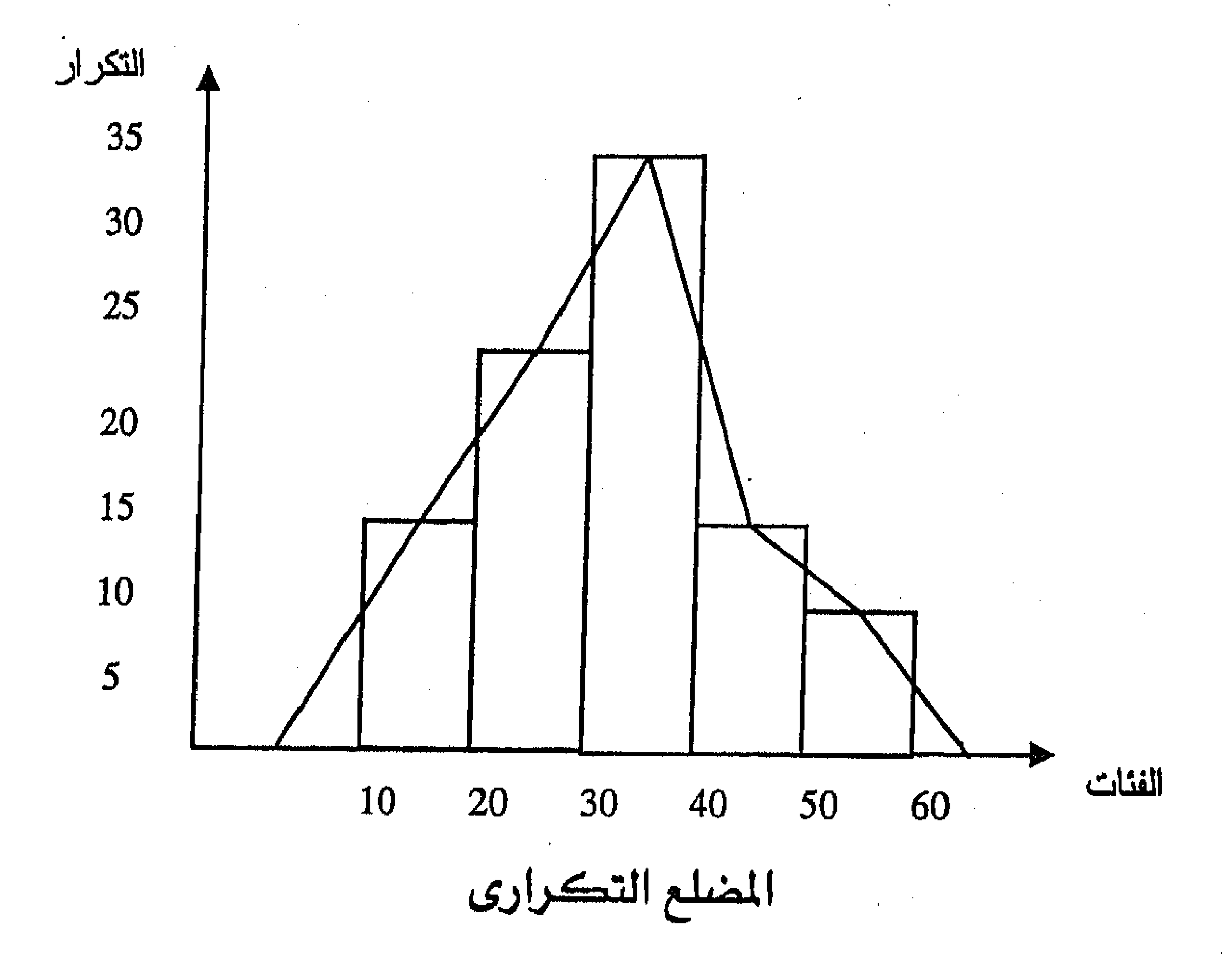
2- نفترض وجود فئة سابقة لأول فئة بالجدول التكرارى تكرارها صفر وأيضاً وجود لاحقة لآخر فئة بالجدول التكرارى بتكرار صفر أيضاً .

3- ننصف القمم العليا لكل مستطيل من مستطيلات المدرج التكرارى .

4- نصل نقاط التنصيف ببعضها فنحصل على المضلع التكرارى .

مثال: ارسم المضلع التكرارى من بيانات جدول التوزيع التكرارى التالى:

الفئات	10-	20-	30-	40-	60-50	المجموع
التكرار	15	25	35	15	10	100

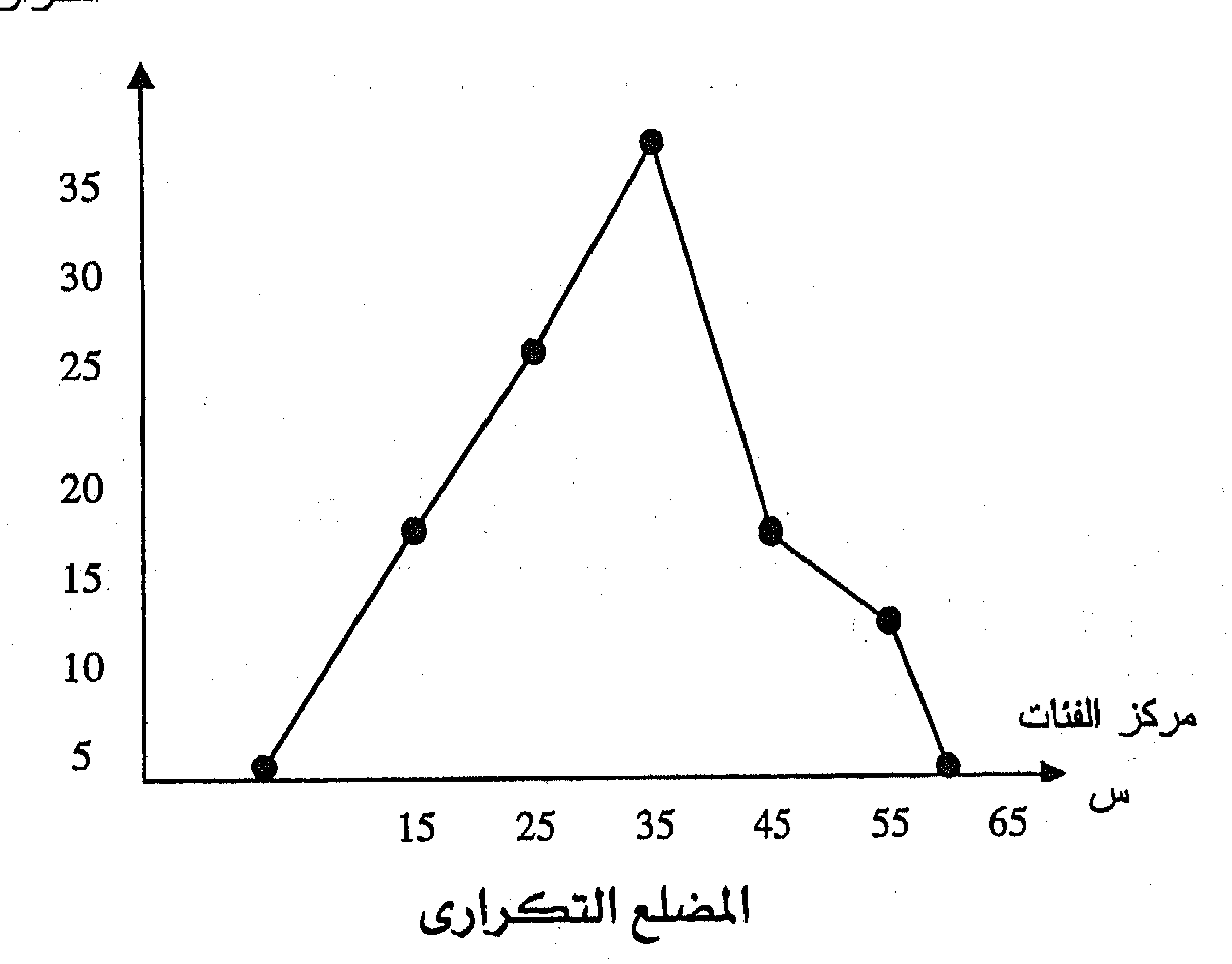


المضلع التكرارى

خطوات رسم المضلع التكرارى باستخدام مراكز الفئات :

يمثل المضلع التكرارى فى هذه الحالة العلاقة بين مراكز الفئات والتكرارات ويتم رسمه كما سبق مع افتراض وجود فئتين سابقة ولاحقة بالجدول التكرارى بتكرار مساوياً للصفر .

مثال : من بين بيانات المثال السابق ارسم المضلع التكرارى

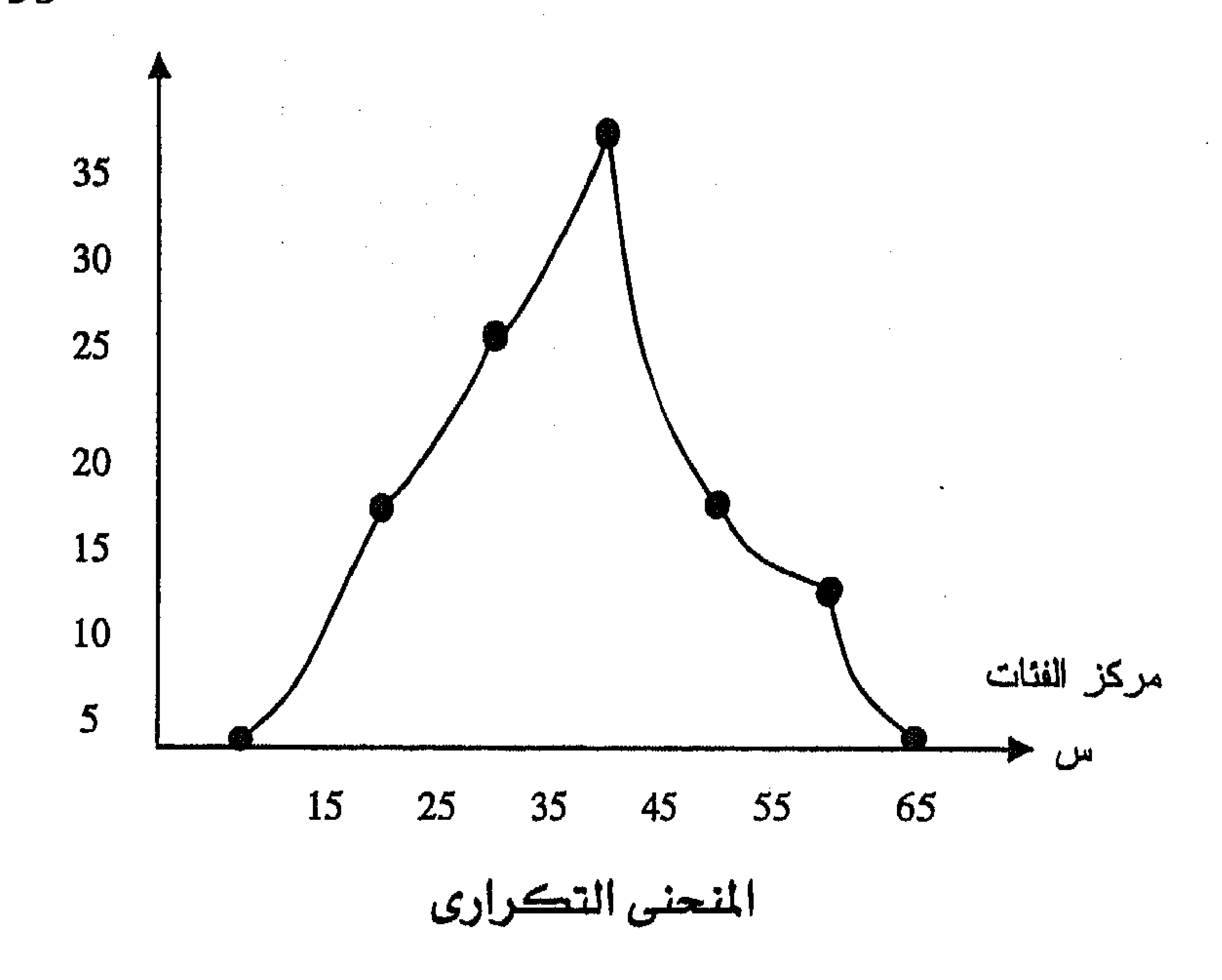


المضلع التكرارى

3- المنحنى التكرارى:

هو الخط المنحنى الواصل بين منتصف القمم العليا للمستطيلات التى يتكون منها المدرج التكرارى . ويمكن الحصول على المنحنى التكرارى أيضاً من خلال العلاقة بين مراكز الفئات والتكرار كما فى حالة رسم المضلع التكرارى .

مثال : ارسم المنحنى التكرارى من الجدول التكرارى للمثال ا



المنحنى التكرارى

4- المنحنى التكرارى المتجمع الهابط:

للحصول على المنحنى التكرارى المتجمع الهابط يلزمنا تكوين جدول تكرارى متجمع هابط ثم نرسم العلاقة بين الفئات والتكرارات المتجمع الهابطة فنحصل على المنحنى التكرارى المتجمع الهابط .

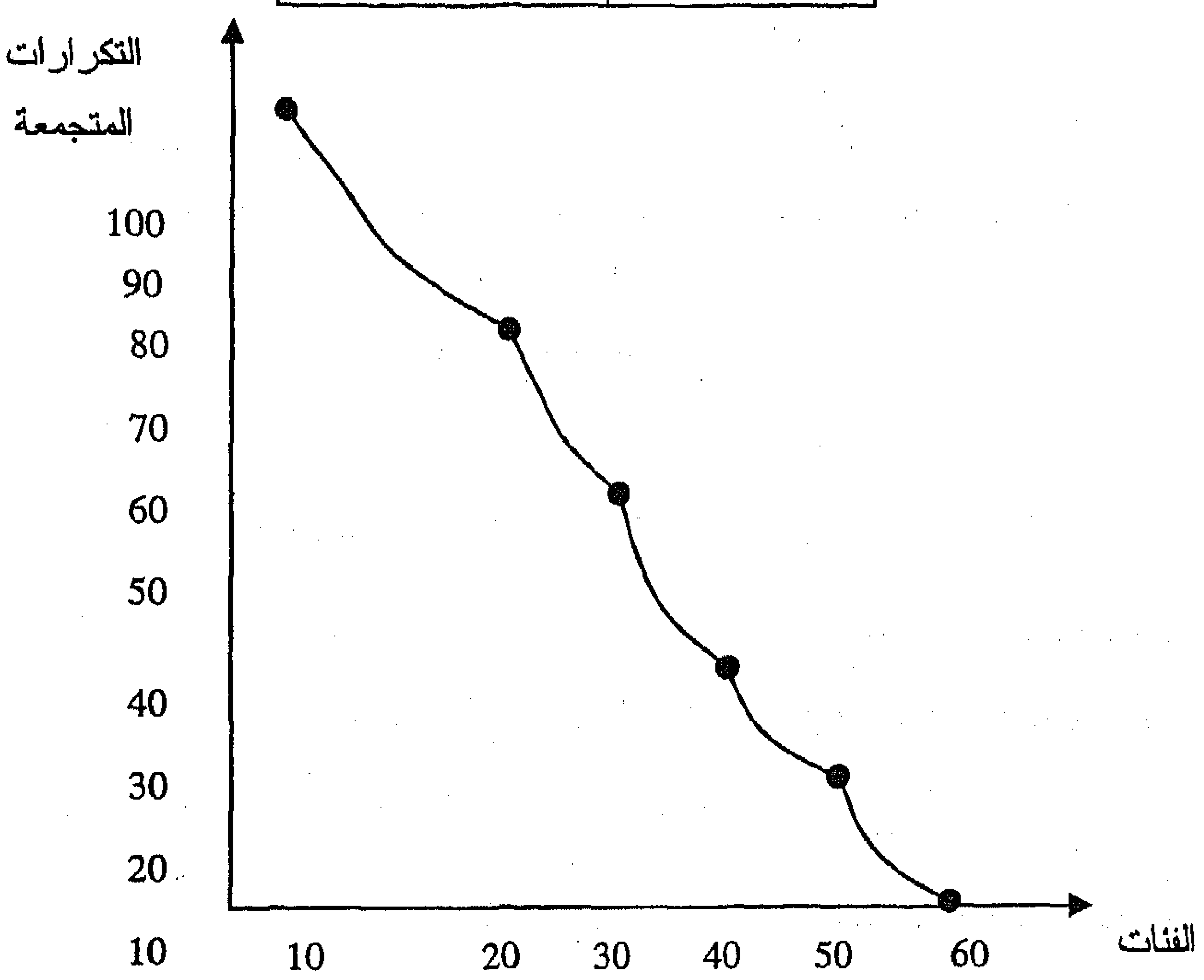
مثال : ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الهابط من بيانات الجدول التكرارى السابق .

خطوات الحل :

- تكوين جدول متجمع هابط
- المحور الأفقى يمثل الفئات بمقياس رسم مناسب

- المحور الرأسى يمثل التكرارات المتجمعة الهابطة بمقياس رسم مناسب

تكرارات متجمعة	الفئات
100	10 فأكثر
85	20 فأكثر
60	30 فأكثر
25	40 فأكثر
10	50 فأكثر
0	60 فأكثر



المنحنى التكرارى المتجمع الهابط

5- المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد:

للحصول على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد يلزمنا تكوين جدول تكرارى متجمع صاعد ثم نرسم بعد ذلك العلاقة بين الفئات

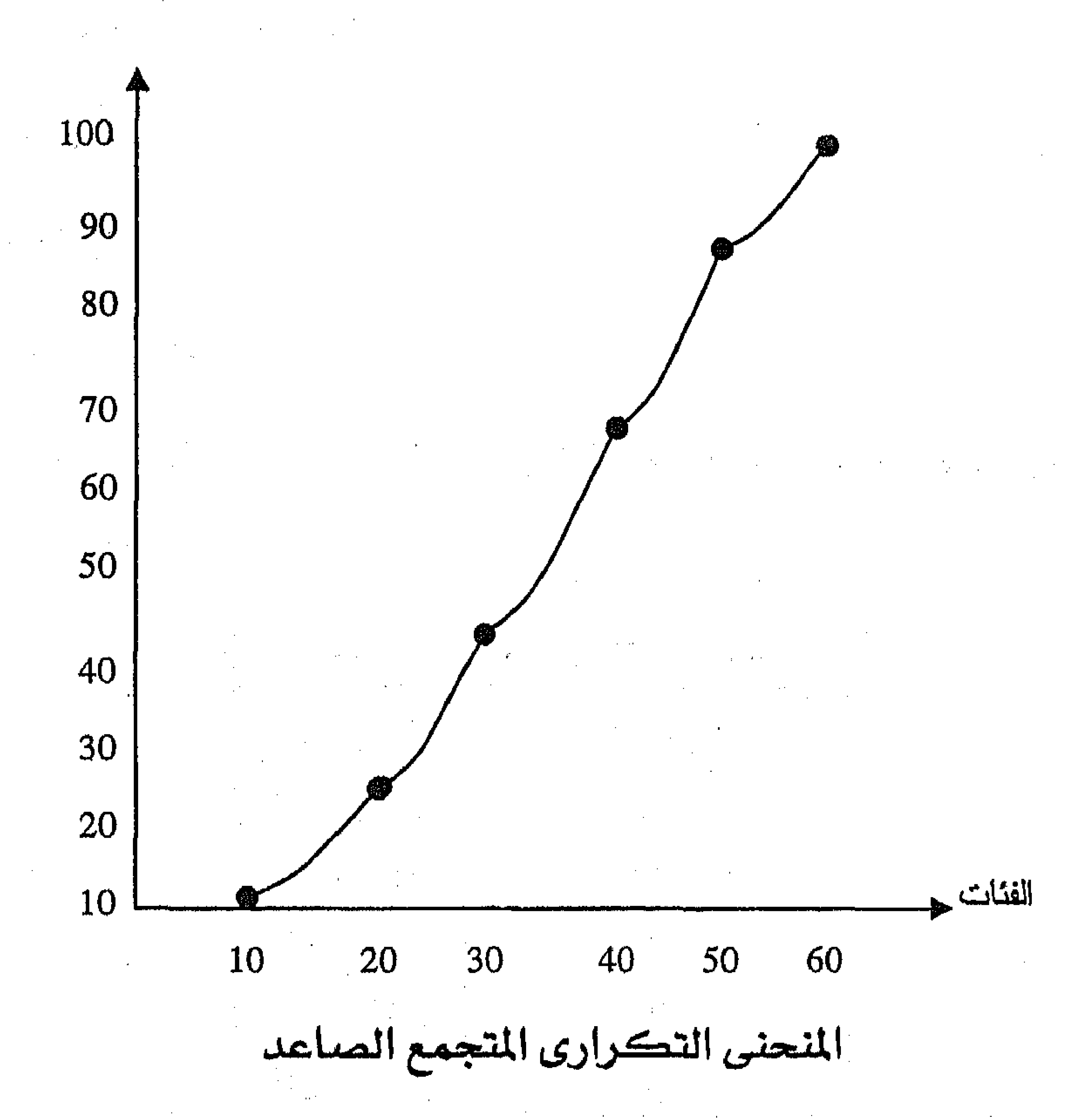
والتكرارات المتجمعة الصاعدة فنحصل على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد .

مثال : ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد من بيانات الجدول التكرارى السابق .

خطوات الحل :

- تكوين جدول متجمع صاعد
- المحور الأفقى يمثل الفئات بمقياس رسم مناسب
- المحور الرأسى يمثل التكرارات المتجمع الصاعدة بمقياس رسم مناسب

الفئات	تكرارات متجمعة
أقل من 10	0
أقل من 20	15
أقل من 30	40
أقل من 40	75
أقل من 50	90
أقل من 60	100



المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

تمارين

(1) كون جدول تكرارى من البيانات التالية :

30 34 38 33 33 37 43 50 39 34
36 23 26 35 29 26 20 27 27 28
46 45 35 31 30 36 28 32 39 35
38 39 45 30 52 39 40 37 54 46
49 32 39 36 58 38 31 35 30 30
25 25 28 31 29 29 45 53 31 32
37 38 26 38 43 39 37 26 29 26
43 44 34 40 41 35 41 43 42 46
44 40 53 36 36 48 49 47 47 37
41 43 44 41 43 35 41 40 38 42

(2) من الجدول التكرارى التالى ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والهابط.

الفئات	-10	-20	-30	-40	-50	-60	80-70	المجموع
التكرار	8	12	18	25	17	15	5	100

(3) من بيانات الجدول التكرارى السابق ارسم كل من :

- المدرج التكرارى
- المضلع التكرارى
- المنحنى التكرارى

(4) الجدول التالى يبين الإنتاج الكلى من القطن المصرى وكمية الصادرات منه خلال الفترة 1985-1992 **والمطلوب تصوير هذه البيانات عن طريق :**

أ – الخط البيانى .

ب- الأعمدة البيانية .

السنوات	الإنتاج الكلى من القطن بالألف قنطار	كمية الصادرات بالألف قنطار
1985	7345	2876
1986	6902	2952
1987	5421	2757
1988	5055	2068
1989	4947	1450
1990	5190	859
1991	5594	360
1992	5955	332

(5) إذا علمت أن مبيعات معارض إحدى شركات الغزل والنسيج من الأقمشة والملابس الجاهزة فى عامى 1995 ، 2000 كالآتى :

المبيعات	عام **1995** مليون دينار	عام **2000** مليون دينار
مبيعات محلية	60	120
صادرات للدول العربية	180	480
صادرات للعالم	260	600
جملة المبيعات	500	1200

والمطلوب تمثيل بيانات كل سنة بطريقة الدائرة .

(6) الجدول التكرارى التالى يمثل أجور العمال الأسبوعية للعاملين فى إحدى شركات الاستثمار

فئات الأجور	-50	-60	-70	-80	-90	110-100	120-110
عدد العاملين	8	10	16	14	10	5	2

المطلوب:

1- رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد واستخرج منه :

أ – نسبة العاملين الذين يحصلون على أجر أقل من 85 دينار فى الأسبوع

ب- عدد العاملين الذين تتراوح أجورهم الأسبوعية بين 80 ، 110 دينار

2- رسم المدرج التكرارى.

3- رسم المضلع التكرارى.

4- رسم المنحنى التكرارى.

(7) يوضح الجدول التكرارى التالى بيانات 300 موظفاً موزعة على حسب السن

السن	أقل من20	-20	-24	-30	-35	-40	60-50	المجموع
عدد الموظفين	15	35	50	80	70	30	20	300

المطلوب

1- رسم المدرج التكرارى .

2- رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والهابط .

3- أوجد عدد الموظفين الذين يتراوح سنهم من 20 لأقل من 40 سنة .

4- أوجد عدد الموظفين الذين يتراوح سنهم أكبر من 40 سنة .

(8) أوجد جدول التكرار النسبى لبيانات التمارين رقم (2) ، (6) ، (7) السابقة .

الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

تمهيد :

بعـد أن يقـوم الباحـث بجمـع البيانـات عـن الظـاهـرة موضـوع الدراسة يقوم بتلخيصها وتبويبها فى صورة توزيعات تكرارية مختلفة ثم تمثيلها بيانياً بأحد الطرق السابق ذكرها ، وفى هذه الحالة يكون الباحث قد كوَّن فكرة عن الظاهرة المراد دراستها ، ولكن ذلك لا يكفى لمقارنتها بالظواهر المثيلة المتشابهة ، ويلزم ذلك تلخيص البيانات الواردة فى الجداول التكرارية فى صورة أكثر دقة لكى يمكننا الحكم على دقتها أو اختلافها .

وللقيام بذلك يكون من المفيد البحث عن قيمة متوسطة تعبر عن هذا التوزيع يطلق عليها المتوسط، وهى القيمة التى تتجمع حولها قيم الظاهرة ، ويمثل مركز أى مجموعة من القيم تلك القيمة التى تميل مجموعة القيم إلى التجمع حولها والمقياس الذى يقيس هذا المركز يسمى بمقياس النزعة المركزية . وهناك عدة مقاييس للنزعة المركزية سوف نركز منها على المقاييس التالية :

1- الوسط الحسابى Arithmetic Mean

2- الوسيط Median

3- المنوال Mode

4- الوسط الهندسى Geometric Mean

5- المتوسط الموزون Weighted Mean

وهنـاك عـدد مـن الشـروط يجـب توافرهـا فـى مقـاييس النـزعـة المركزية يذكر منها :

(1) ألا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتفرقة .

(2) يسهل حسابه ومعالجته جبرياً .

(3) أن يأخـذ فـى الاعتبـار كـل المفـردات التـى تتكـون منهـا الظـاهـرة موضع الدراسة .

(4) أن يكون للمقياس معنى وخواص مميزه .

(5) يمكن حسابه بسرعة وسهولة .

وسـوف يتم تناول هذه المقاييس سابقة الذكر سواء على مستوى القيم المطلقة أو على البيانات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى .

أولاً : الوسط الحسابى :

وهـو يعتـبر مـن أكثـر مقـاييس النزعـة المركزيـة شـيوعاً واستخداماً ، ويمكن حساب الوسط الحسابى من بيانات القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة فى شكل جداول تكرارية .

(أ) الوسط الحسابى باستخدام القيم المطلقة :

1- الطريقة المباشرة :

إذا كـان لـدينا مجموعـة مـن القـيم $س_1$ ، $س_2$ ، .... $س_ن$ حيـث ن عدد القيم فإن الوسط الحسابى لهذه القيم يمكن حسابه من الصيغة الرياضية التالية :

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + \dots س_ن}{ن} \quad \frac{مجـ س}{ن}$$

خطوات الحساب :

1- نجمع قيم المفردات ونرمز لها بالرمز مجـ س

2- نحصر عدد هذه القيم ونرمز لها بالرمز ن

3- نقدر الوسط الحسابى ونرمز له بالرمز $\bar{س}$

مثال : أوجد الوسط الحسابى للقيم التالية :1، 2، 3، 4، 5

الحل :

مجـ س = 15 ، ن = 5

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{15}{5}$$

ملحوظة :

من العلاقة الرياضية للوسط الحسابى س = $\frac{مجـ س}{ن}$

يمكن استنباط العلاقة التالية :

(1) مجـ س = ن X $\bar{س}$

أى فى حالة معلومية الوسط الحسابى لمجموعة من البيانات ومعرفة عددها فإنه يمكن الحصول على مجموع هذه البيانات

مثال : إذا علمت أن الوسط الحسابى لمجموعة من القيم عددها 8 هو 24 فأوجد مجموع هذه القيم

الحل : س = 24 ، ن = 8

∴ مجـ س = 8 × 24 = 192

(2) ن = $\frac{\text{مجـ س}}{\bar{\text{س}}}$

أى بمعلومية الوسط الحسابى لمجموعة من القيم ومجموع هذه القيم يمكن معرفة عدد هذه القيم .

مثال : أوجد عدد كتب الإحصاء التى تم بيعها للطلبة إذا علمت أن إجمالى ثمنها 500 دينار وثمن النسخة الواحدة 10 دينار .

الحل : مجـ س = 500 ، $\bar{\text{س}}$ = 10

∴ ن = $\frac{\text{مجـ س}}{\bar{\text{س}}}$ = = 50 كتاب

2- طريقة الانحرافات :

وتستخدم هذه الطريقة فى حالة إذا كانت قيم مفردات الظاهرة موضع الدراسة كبيرة . **وتتلخص خطوات حساب هذه الطريقة فى الآتى :**

1- يتم اختيار وسط فرضى لمجموعة القيم المراد حساب الوسط الحسابى لها ويرمز له بالرمز (و) .

2- يتم طرح (و) من كل القيم فنحصل على الانحرافات والتى يرمز لها بالرمز (ح) .

حيث : ح = س - و

3- يطبق القانون $\bar{س} = \frac{مجـ ح}{ن} + و$

<u>مثال</u> أوجد الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات للقيم التالية

14، 18، 15، 16، 17، 10

<u>الحل</u> (أ) نختار الوسط الفرضى وليكن و = 10

(ب) نحسب ح وهى س - و

∴ ح = 4 ، 8، 5، 6، 7، 0

(جـ) $\bar{س} = \frac{4 + 8 + 5 + 6 + 7 + 0}{6} + 10$

$= \frac{30}{6} + 10 = 15$

مثال : أوجد الوسط الحسابى لقيم المثال السابق بالطريقة المباشرة

الحل : $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$

$= \frac{14 + 18 + 15 + 16 + 17 + 10}{6}$

$= \frac{90}{6} = 15$ وهى نفس النتيجة السابقة

3- طريقة الانحرافات المختصرة:

وتختلف هذه الطريقة عن الطريقة السابقة فى إنه إذا كانت الانحرافات (ح) التى حصلنا عليها يمكن قسمتها على رقم معين

لتبسيط الأرقام فإنه يمكن الحصول على الانحرافات المختصرة ويرمز لها بالرمز ح وفق العلاقة الرياضية التالية .

$$\bar{س} = \left(\frac{مجـ \bar{ح}}{ن} \times \text{العامل المشترك} \right) + و$$

خطوات الحل :

1- يتم اختيار وسط فرضى من قيم الظاهرة موضوع الدراسة ويرمز له بالرمز و

2- نحسب الانحرافات (ح) حيث ح = س - و

3- يتم حساب ($\bar{ح}$) حيث $\bar{ح}$ = ح ÷ العامل المشترك

4- يتم حساب $\bar{س}$ من العلاقة الرياضية السابقة

مثال : أحسب الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات المختصرة من القيم التالية :

160 ،150 ،140 ،130 ،120 ،110

الحل : نفرض أن الوسط الفرضى هو 110 ونقوم بحساب (ح)، ($\bar{ح}$) كما فى الجدول التالى :

	القيم (س)	الانحرافات ح = س - و	الانحرافات المختصرة $\bar{ح} = \frac{ح}{10}$
	110	0	0
	120	10	1
	130	20	2
	140	30	3
	150	40	4
	160	80	5
المجموع	810	150	15

$$\bar{س} = \left(\frac{\overline{مجـ ح}}{ن} \times م \right) + و$$

$$= \left(\frac{15}{6} \times 10 \right) + 110$$

$$= 135$$

مثال : من بيانات المثال السابق أوجد الوسط الحسابى

(1) بالطريقة المباشرة (2) بطريقة الانحرافات

الحل : (1) الطريقة المباشرة

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$$

$$= \frac{810}{6} = 135$$

(2) طريقة الانحرافات

$$\bar{س} = \frac{مجـ ح}{ن}$$

$$\bar{س} = \frac{150}{6} + 110$$

$$= 135$$

(ب) الوسط الحسابى من البيانات المبوبة المنتظمة :

1- الوسط الحسابى للجداول التكرارية ذات الدرجات : توجد مجموعة من البيانات على هيئة قيم للمفردات $س_1$، $س_2$، ... $س_ن$

ولكل قيمة تكرار معينة ك مقابل لكل قيمة س على الصورة $ك_1$، $ك_2$، ... $ك_ن$ ويتم حساب الوسط الحسابى من العلاقة الرياضية .

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب الدرجة × تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س × ك}}{\text{مجـ ك}}$$

خطوات الحساب :

1- بالإضافة إلى عمودى المسألة س، ك نكوّن عمود ثالث يشمل حاصل ضرب س × ك .

2- نوجد مجموع التكرارات وكذلك مجموع س × ك .

3- نطبق القانون السابق لإيجاد الوسط الحسابى .

مثال : أوجد الوسط الحسابى من الجدول التالى

درجات الطلاب (س)	3	4	5	6	7	8	المجموع
عدد الطلبة (ك)	10	15	35	20	15	5	100

الحل :

س	ك	س × ك
3	10	30
4	15	60
5	35	175
6	20	120
7	15	105
8	5	40
المجموع	100	530

$$\bar{س} = \frac{مجـ س \times ك}{مجـ ك} = \frac{530}{100} = 5.3 \text{ درجة}$$

2- الوسط الحسابى للبيانات المبوبة المنتظمة :

لإيجاد الوسط الحسابى للبيانات المبوبة المنتظمة أى التى فى صورة جدول توزيع تكرارى منتظم يوجد ثلاث طرق لإيجاده :

(أ) الطريقة المباشرة :

وفيها يستخدم القانون التالى لحساب الوسط الحسابى وهو نفس القانون المستخدم فى حالة الجداول التكرارية ذات الدرجات حيث :

$$\bar{س} = \frac{مجـ س \times ك}{مجـ ك}$$

حيث س تمثل مركز الفئة ، ك تمثل التكرار

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

$$\text{أو} = \frac{\text{بداية الفئة + بداية الفئة التالية}}{2}$$

خطوات الحساب :

1- نوجد عمود مراكز الفئات س .

2- نوجد عمود حاصل ضرب س × ك .

3- نوجد مجموع التكرارات (مجـ ك) ومجموع س × ك .

4- نطبق القانون السابق لإيجاد $\bar{س}$

مثال : أوجد الوسط الحسابى من بيانات جدول التوزيع التكرارى التالى بالطريقة المباشرة .

الفئات	-10	-20	-30	-40	-50	70-60
التكرار	3	14	16	11	4	2

الحل :

1- نكون جدول الحل وهو يشمل 4 أعمدة هما عمودى المسألة (عمود الفئات وعمود التكرارات) بالإضافة إلى عمود مركز الفئات س وعمود حاصل ضرب س × ك .

2- نوجد مركز الفئات وتوضع فى عمود س .

3- نوجد حاصل ضرب س × ك .

4- نوجد مجـ س ، مجـ س × ك .

5- نطبق القانون لإيجاد $\overline{س}$ حيث $\overline{س} = \frac{مجـ س × ك}{مجـ ك}$

الفئات	التكرار (ك)	مركز الفئة (س)	س × ك
-10	3	15	45
-20	14	25	350
-30	16	35	560
-40	11	45	495
-50	4	55	220
70-60	2	65	130
المجموع	50		1800

$$ن = \frac{\text{مجـ س × ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{1800}{50} = 36$$

(ب) طريقة الانحرافات :

تستخدم هذه الطريقة لتبسيط الحسابات . وتعتمد هذه الطريقة على اختيار وسط فرضى وهو عبارة عن مركز الفئة المقابل لأكبر تكرار .

خطوات الحساب :

1- نكون جدول الحل وهو يشمل 5 أعمدة هما عمودى المسألة (عمود الفئات وعمود التكرار) وعمود مركز الفئة س وعمود ح (انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضى) وأخيراً عمود حاصل ضرب ح × ك .

2- نختار الوسط الفرضى (و) من بين مراكز الفئات وهو عادة يكون مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار .

3- نحسب انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضى أى نحسب

ح = س - و

4- نحسب حاصل ضرب ح × ك

5- نوجد المجموع لعمود التكرار وعمود حاصل ضرب ح × ك

6- نطبق القانون

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} + و$$

مجـ ك

مثـال : احسـب الوسـط الحسـابى بطريقـة الانحرافـات لجـدول التوزيع التـكرارى من المثال السابق .

الحل :

الفئات	التكرار (ك)	س	ح	ح × ك
-10	3	15	20-	60-
-20	14	25	10-	140-
-30	16	**35**	0	0
-40	11	45	10+	110+
-50	4	55	20+	80+
70-60	2	65	30+	60+
المجموع	50			50

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} + و$$

$$= \frac{50}{50} + 35 = 36$$

ملحوظـة : تم اختيـار الوسـط الفرضـى و = 35 وهـو يشـير إلى مركـز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار .

(جـ) طريقة الانحرافات المختصرة :

وهـذه الطريقـة لا تختلـف عـن الطريقـة السـابقة وفيهـا تجـرى الثلاث خطوات الأولى ثم نوجد العمـود الخـامس الـذى يمثل الانحرافـات

المختصرة $\bar{ح}$ وهو عبارة عن ح مقسوماً على طول الفئة ل ثم نوجد حاصل ضرب $\bar{ح} \times ك$.

خطوات الحساب :

1- تجرى الخطوات من 1 – 3 من طريقة الانحرافات .

2- نحسب الانحرافات المختصرة $\bar{ح} = \frac{ح}{ل}$

3- نوجد حاصل الضرب $\bar{ح} \times ك$.

4- نوجد مجاميع عمود ك ، عمود $\bar{ح} \times ك$.

5- نحسب الوسط الحسابى من العلاقة

$$\bar{س} = و + \frac{مجـ \bar{ح} \times ك}{مجـ ك} \times ل$$

مثال : احسب الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات المختصرة من بيانات جدول التوزيع التكرارى الأسبق

الحل :

ف	ك	س	ح = س - و	$\bar{ح} = \frac{ح}{ل}$	$\bar{ح} \times ك$
-10	3	15	20-	2-	6-
-20	14	25	10-	1-	14-
-30	16	**35**	0	0	0
-40	11	45	10+	1+	11
-50	4	55	20+	2+	8
70-60	2	65	30+	3+	6
المجموع	50				5

$$\bar{س} = و + \frac{مجـ ح \times ك}{مجـ ك} \times ل$$

$$= 35 + \frac{5}{50} \times 10 = 36$$

ملحوظة : لاحظ أن حساب الوسط الحسابى بأى طريقة من الطرق الثلاث السابقة يعطى نفس النتيجة .

(جـ) الوسط الحسابى من البيانات المبوبة غير المنتظمة :

من خلال هذه الطريقة يمكن إيجاد الوسط الحسابى بالطرق الثلاث السابقة والخاصة بالجداول التكرارية المنتظمة ولكن عند استخدام طريقة الانحرافات المختصرة يجرى إيجاد ح بقسمة ح على عامل مشترك بدلاً من (ل) وإذا تعذر الحصول على عامل مشترك فيكتفى بطريقة الانحرافات .

مثال : احسب الوسط الحسابى من جدول التوزيع التكرارى الآتى :

الفئات	-10	-20	-30	-50	-80	150-120	المجموع
التكرار	5	8	23	34	20	10	100

الحل :

أولا : الطريقة العادية (المباشرة) :

ف	ك	س	س × ك
-10	5	15	75
-20	8	25	200
-30	23	40	920
-50	34	65	2210
-80	20	100	2000
150-120	10	135	1350
المجموع	100		6755

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{6755}{100} = 67.55$$

ثانيا: طريقة الانحرافات :

ف	ك	س	ح	ح × ك
-10	5	15	50-	250-
-20	8	25	40-	320-
-30	23	40	25-	575-
-50	34	**65**	0	0
-80	20	100	35+	700
150-120	10	135	70+	700
المجموع	100			255

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} + \text{و}$$

$$= \frac{255}{100} + 65 = 67.55$$

ثالثا : طريقة الانحرافات المختصرة :

ف	ك	س	ح	$\bar{ح} = \frac{ح}{5}$	$\bar{ح} \times$ ك
-10	5	15	50-	10-	50-
-20	8	25	40-	8-	64-
-30	23	40	25-	5-	115-
-50	34	**65**	0	0	0
-80	20	100	35+	7+	140
150-120	10	135	70+	14+	140
المجموع	100				51

$$\bar{س} = و + \frac{مجـ \bar{ح} \times ك}{مجـ ك} \times \text{العامل المشترك}$$

$$= 65 + \frac{51}{100} \times 5 = 67.55$$

100

ملحوظة : لاحظ إننا قمنا باختيار عامل مشترك من قيم الانحرافات ح وهو يساوى 5 ولم يتم اختيار ل كما فى حالة الجداول المنتظمة لأن الجدول هنا غير منتظم .

خصائص الوسط الحسابى :

1- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يساوى صفر أى :

$$\text{مجـ} (س - \bar{س}) = \text{صفر}$$

مثال : إذا كان لدينا القيم 3 ، 5، 4، 8

$$\text{فيكون } \bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{3 + 5 + 4 + 8}{4} = 5$$

ويكون مجـ (س − $\bar{س}$) = -2 + صفر - 1 + 3 = صفر

2- مجموع مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يكون أقل من مجموع مربع انحرافات القيم عن أى مقدار آخر

مثال : من المثال السابق

مجـ (س − $\bar{س}$)^2 = 4 + صفر+1 + 9 = 14

وإذا أخذنا انحراف القيم عن المقدار 3 مثلاً

مجـ (س − 3) = صفر + 2 +1 + 5

مجـ (س − 3)^2 = صفر + 4 +1 + 25 = 30

∴ مجـ (س − $\bar{س}$)^2 > مجـ (س - أى مقدار غيرس $\bar{}$)^2

3- الوسط الحسابى يتأثر بالقيم الشاذة لأنه يأخذ فى اعتباره جميع القيم فمثلاً إذا كان لدينا المجموعتين أ ، ب حيث :

أ = 1، 2 ، 7 ، 200

ب = 1، 2، 3، 4

فيكون الوسط الحسابى للمجموعة أ $\bar{س}_أ$ =

$$\frac{200+7+2+1}{4} = \frac{210}{4} = 52.5$$

ويكون الوسط الحسابى للمجموعة ب $\bar{س}_ب$ =

$$\frac{4+3+2+1}{4} = 2.5$$

ويلاحظ أن المجموعة أ تأثرت بشكل كبير لوجود القيمة (200) وهى شاذة عن باقى الأرقام .

4- من الصعب حساب الوسط الحسابى من الجداول المفتوحة لصعوبة تحديد مراكز الفئات المناظرة لها .

5- لا يمكن إيجاد الوسط الحسابى من الرسم البيانى كما فى حالة الوسيط والمنوال كما سوف يأتى ذكره فيما بعد .

ثانياً : الوسيط Median

يعرف الوسيط بأنه القيمة التى تتوسط مجموعة من القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

طرق حساب الوسيط :

(أ) من القيم المطلقة :

1- إذا كان عدد القيم المطلقة فردى فإن

ترتيب الوسيط = حيث ن عدد القيم

مثال : احسب الوسيط للقيم الآتية : 5، 6، 4 ، 3، 2

الحل : نرتب القيم تنازلياً 6، 5، 4، 3 ، 2

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{ن + 1}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

وبالتالى يكون الوسيط هو القيمة التى يكون ترتيبها الثالث وهى 4

2- إذا كان عدد القيم المطلقة زوجياً فإنه يوجد قيمتين للوسيط ويأخذ الوسط الحسابى لهما لنحصل على الوسيط المطلوب .

وفى هذه الحالة نحصل على ترتيب الوسيطين كالآتى :

$$\text{الترتيب الأول} = \frac{ن}{2}$$

الترتيب الثانى = $\frac{ن}{2} + 1$.

مثال : احسب الوسيط للقيم الآتية : 3 , 6 , 1 , 2 , 8 , 10

الحل : ترتيب القيم تنازلياً 10 , 8 , **6** , **3** , 2 , 1

الترتيب الأول = $\frac{ن}{2} = \frac{6}{2} = 3$

الترتيب الثانى = $\frac{ن}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$

∴ يوجد قيمتين للوسيط ترتيبهما الثالث والرابع وبالنظر إلى البيانات بعد ترتيبها تنازلياً تكون هاتين القيمتين هما 6 , 3 ويكون الوسيط هو $(6 + 3) / 2 = 4.5$

(ب) حساب الوسيط من البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط من الجداول التكرارية سواء كانت منتظمة أو غير منتظمة أو مفتوحة لأنه لا يتأثر بالقيم الشاذة .

خطوات حساب الوسيط من الجداول التكرارية :

(1) يتم حساب ترتيب الوسيط من العلاقة : ترتيب الوسيط = مجـ ك/2

(2) نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد .

(3) يحدد ترتيب الوسيط على جدول التكرار المتجمع الصاعد .

(4) يتم تحديد الفئة الوسيطية بناء على ترتيب الوسيط وهى الفئة المقابلة لأكبر تكرار فى الجدول التكرارى .

(5) نطبق القانون التالى لإيجاد قيمة الوسيط : حيث

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \left\{ \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{ت م ص السابق}\ 2}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \right\}$$

× طول الفئة الوسيطية

ويلاحظ أن تكرار الفئة الوسيطية = ت م ص السابق لترتيب الوسيط – ت م ص اللاحق لترتيب الوسيط .

مثال : أوجد قيمة الوسيط جبرياً وبيانياً من جدول التوزيع التكرارى الآتى :

الفئات	-10	-14	-18	-22	-26	34-30	المجموع
التكرار	10	15	30	25	12	8	100

الحل :

أولاً : إيجاد الوسيط جبرياً :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط

ف	ت م ص	
أقل من 10	0	
أقل من 14	10	
أقل من 18	25	← ت م ص السابق
أقل من 22	55	← ر2
أقل من 26	80	← ت م ص اللاحق
أقل من 30	92	
أقل من 34	100	

أقل من بداية كل فئة

نحدد ترتيب الوسيط على جدول ت م ص لكى نحدد الفئة الوسيطية

الفئة الوسيطة هى (18 - 22)

الحد الأدنى للفئة الوسيطة 18

طول الفئة الوسيطة 4

ت م ص السابق لترتيب الوسيط = 25

ت م ص اللاحق لترتيب الوسيط = 55

الوسيط = $18 + \frac{50 - 25}{55 - 25} \times 4$

$= 18 + \frac{25}{30} \times 4 = 21.33$

ثانياً : إيجاد الوسيط بيانيا :

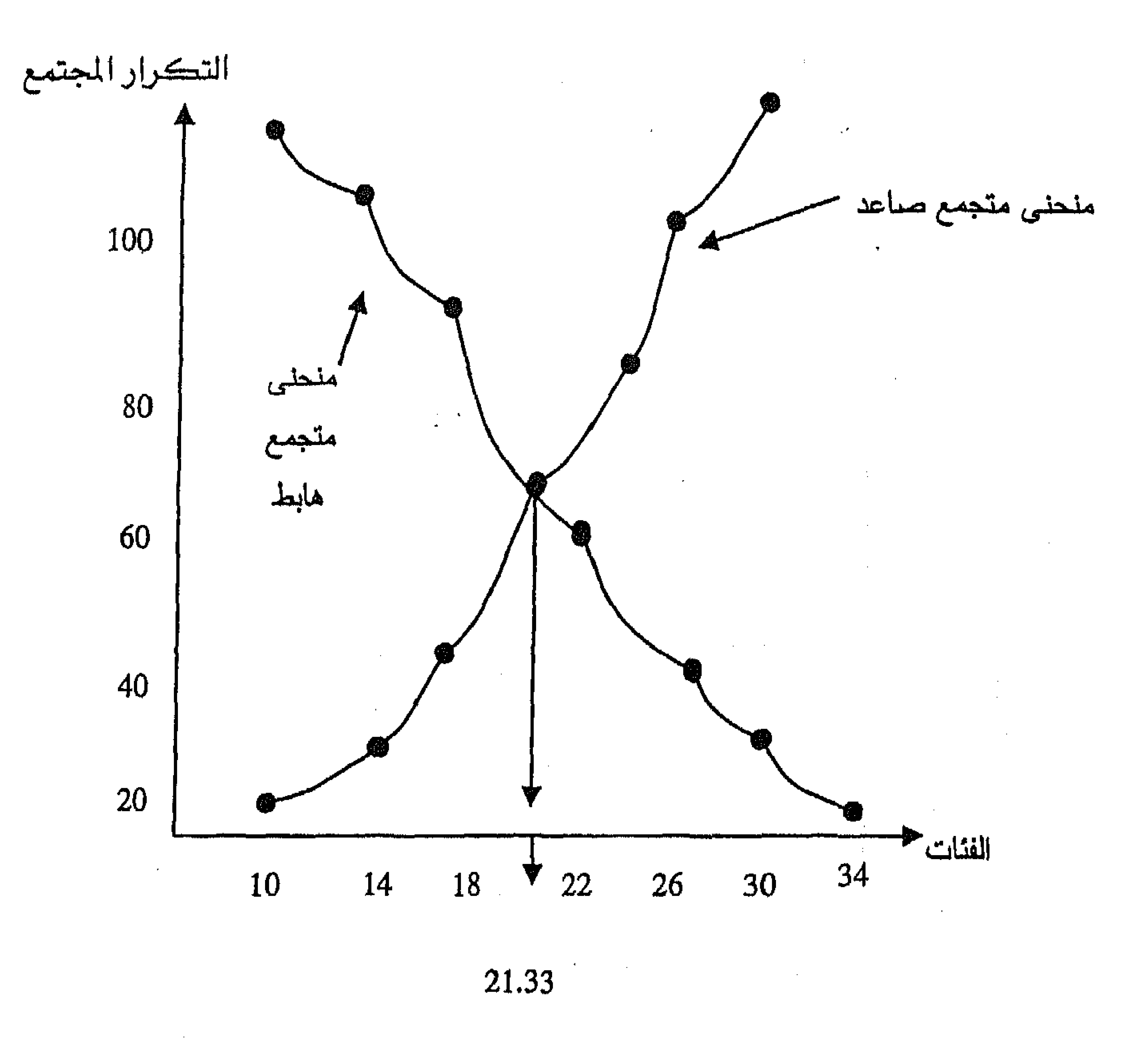
(1) هـو نقطـة تقـاطع المنحنـى التكـرارى المتجمـع الصـاعد مـع المنحنى التكرارى المتجمع الهابط . وبالتالى يلزمنا عمل جدول التكرار المتجمع الهابط .

ف	10 فأكثر	14 فأكثر	18 فأكثر	22 فأكثر	26 فأكثر	30 فأكثر	34 فأكثر
ت م هـ	100	90	75	45	20	8	0

بداية كل فئة فأكثر

ر2

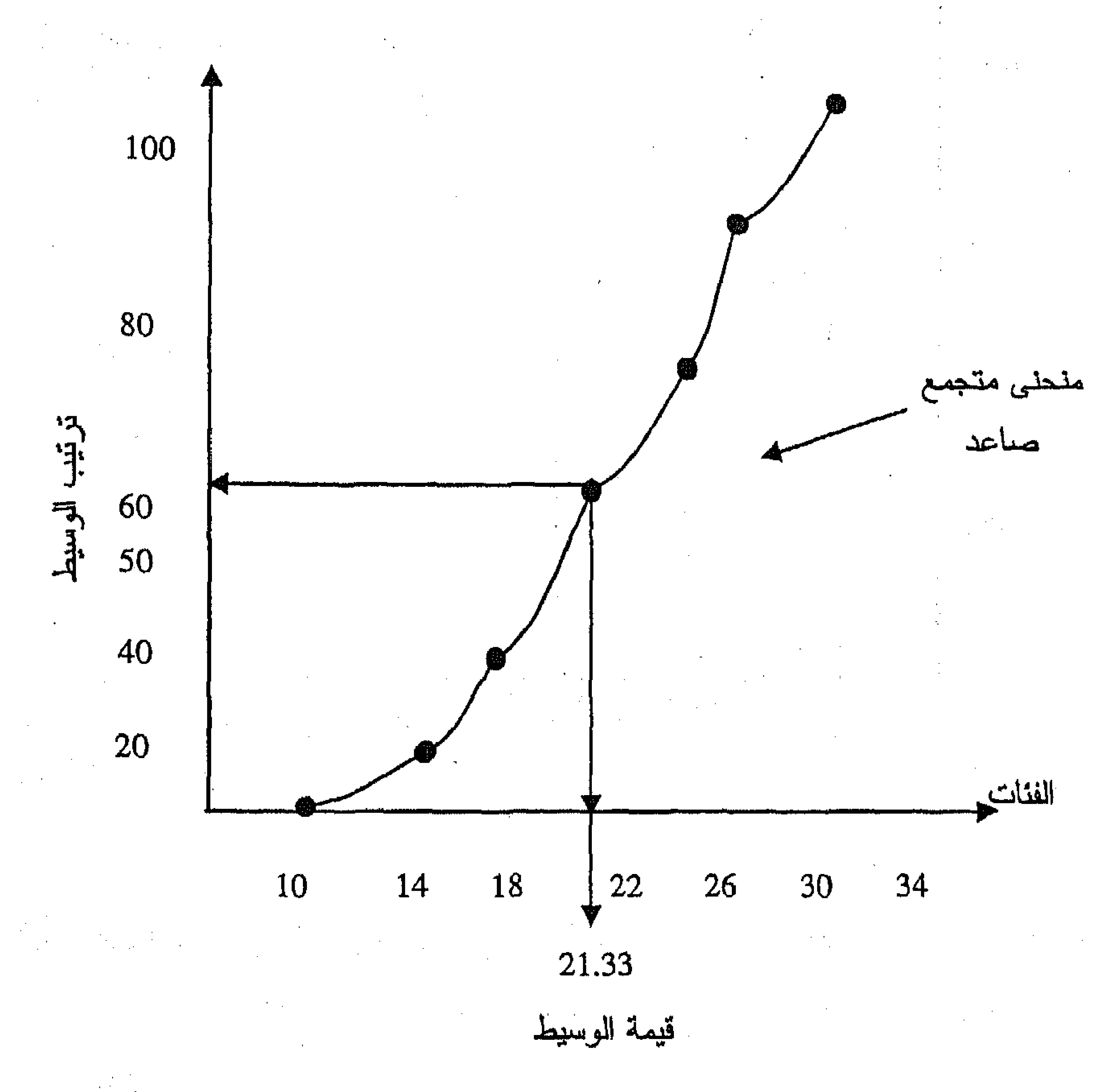
وباستخدام المنحنيين المتجمع الصاعد والمتجمع الهابط ومن نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط وبإسقاط عمود على المحور الأفقى تتحدد قيمة الوسيط من الجدولين كما يتضح من الرسم التالى :



(2) يمكن إيجاد الوسيط بيانياً أيضاً باستخدام أحد المنحنيين المتجمعين (الصاعد أو الهابط) وترتيب الوسيط كما يتضح من الآتى :

- نحدد ترتيب الوسيط = مجـ ك / 2
- نكون الجدول المتجمع الصاعد أو الهابط
- نرسم المنحنى حسب الجدول السابق
- نمد خط من نقطة ترتيب الوسيط لتلاقى المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط ثم نسقط عموداً من نقطة التلاقى على المحور الأفقى فى نقطة تمثل بذلك قيمة الوسيط .

بـافتراض أننـا سـوف نقـوم بإيجـاد الوسـيط مـن المنحنـى المتجمـع الصاعد



ثالثاً : المنوال Mode

يُعـرف بأنـه القيمـة الأكـثـر تكـراراً أو شـيوعاً بـين مفـردات مجموعة من القيم ويمكن حسـاب المنـوال مـن القيم المطلقة أو البيانـات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى .

(أ) حساب المنوال من القيم المطلقة :

لحساب المنوال وفقاً للتعريف السابق يتم البحث عن أكثر القيم تكراراً أو ظهوراً .

مثال : أحسب المنوال للمجموعات التالية من البيانات :

المجموعة (أ) 17، 12، 37، 22، 5، 7، 2، 1، 25

المجموعة (ب) 2، 1، 5، 6، 3، 2، 4، 10 .

المجموعة (ج) 4، 5، 4، 6، 8، 5، 3

الحل :

المجموعة (أ) ليس لها منوال لأن كل القيم لها نفس التكرار .

المجموعة (ب) يوجد بها منوال وهو الرقم 2 لأنه تكرر أكثر من غيره.

المجموعة (ج) يوجد بها منوالين هما 4، 5 لأن لهما نفس التكرار .

ويلاحظ من الحل السابق أنه لا يمكننا اعتبار المنوال فى الحالتين (أ)، (ج) مقياساً للنزعة المركزية .

(ب) حساب المنوال من البيانات المبوبة :

(1) الطريقة الحسابية : يوجد أكثر من طريقة لحساب المنوال بالطريقة الجبرية منها طريقة الرافعة وطريقة بيرسون (الفروق المجزئة) .

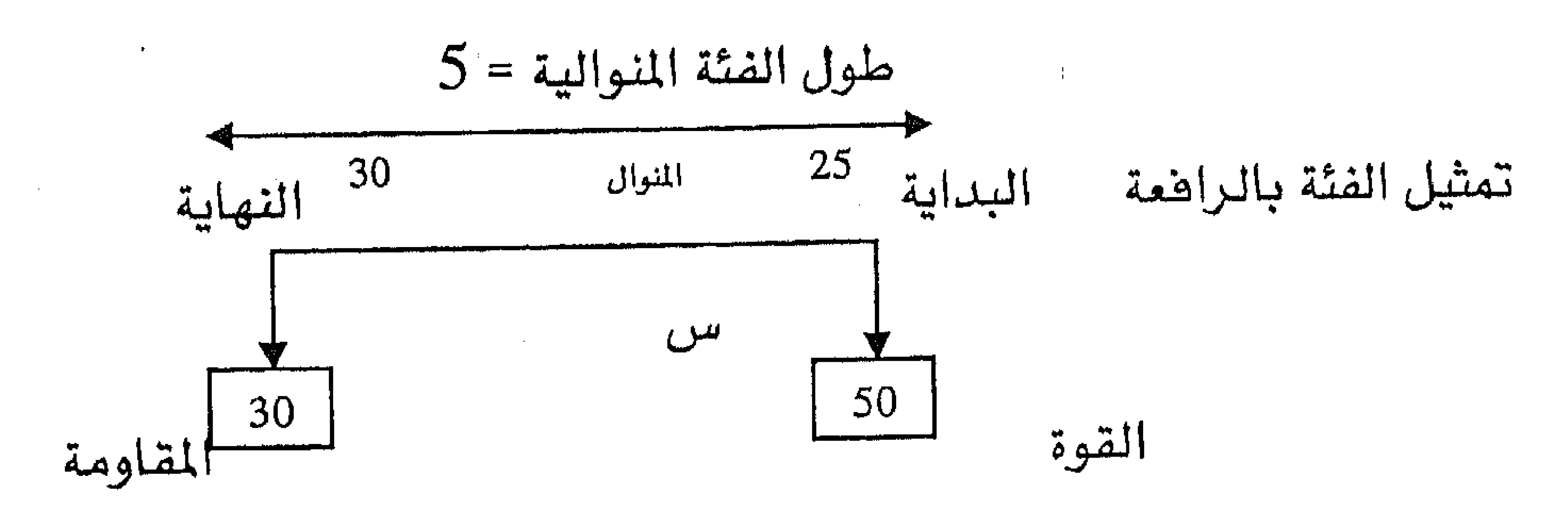
أ - طريقة الرافعة :

وفيها تمثل الفئة المنوالية برافعة تحمل عند بدايتها التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية، وعند نهايتها التكرار اللاحق للفئة المنوالية . والفئة المنوالية هى الفئة المقابلة لأكبر تكرار فى جدول التوزيع التكرارى .

مثال : أوجد المنوال حسابياً من الجدول التكرارى الآتى :

ف	10 -	15-	20 -	25 -	30 -	35 - 40	المجموع
ك	10	30	50	100	30	20	240

الحل : الفئة المنوالية المقابلة لأكبر تكرار هى 25 - 30



نفرض أن المسافة من بداية الفئة المنوالية إلى المنوال = س، وبالتالى تكون المسافة من المنوال حتى نهاية الفئة المنوالية هى5 – س أى طول الفئة المنوالية – س .

وللحصول على قيمة س نطبق قانون الروافع

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

50 × س = 30 × (5 – س)

50 س = 150 – 30 س

80 س = 150

∴ س = $\frac{150}{80}$ = 1.875

80

∴ المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

= 25 + 1.875 = 26.875

(ب) طريقة بيرسون (الفروق المجزئة) :

خطوات الحل:

1- نحدد الفئة المنوالية وهى الفئة المقابلة لأكبر تكرار .

2- نوجد $ف_1$ = تكرار الفئة المنوالية – التكرار السابق لها.

3- نوجد $ف_2$ = تكرار الفئة المنوالية – التكرار اللاحق لها.

4- نحسب المنوال من القانون التالى

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{ف_1}{ف_1 + ف_2} \times ل$$

مثال : أوجد المنوال من المثال السابق

الحل : الفئة المنوالية 25 – 30

الحد الأدنى للفئة المنوالية = 25

تكرار الفئة المنوالية = 100

التكرار السابق للفئة المنوالية = 50

التكرار اللاحق للفئة المنوالية = 30

$ف_1$ = 100 – 50 = 50

$ف_2$ = 100 – 30 = 70

ل = الحد الأعلى للفئة المنوالية – الحد الأدنى للفئة المنوالية

= 30 - 25 = 5

$$\therefore \text{المنوال} = 25 + \frac{50}{70+50} \times 5$$

$$= 25 + \frac{250}{120} = 27.08$$

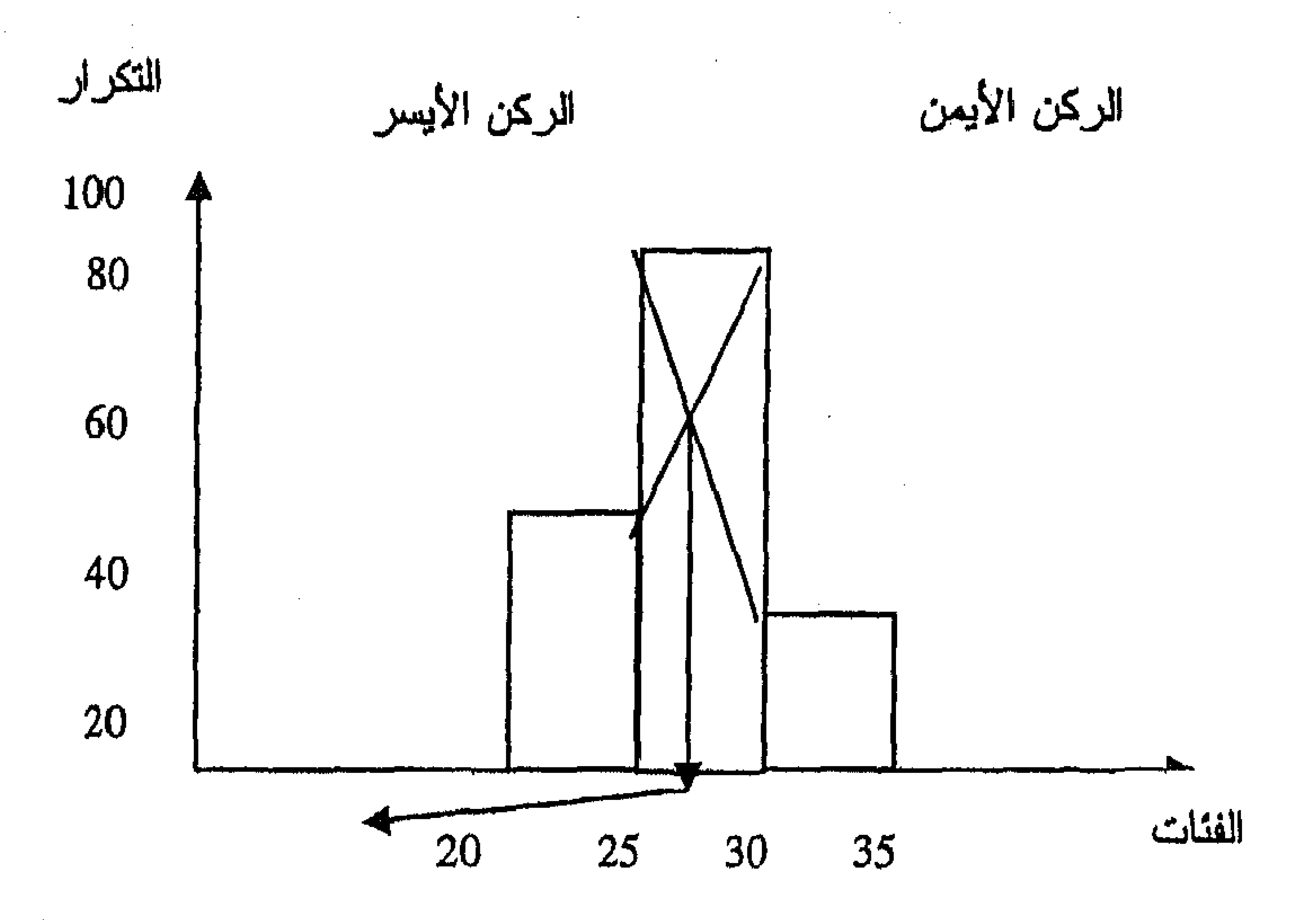
ويلاحظ إن نتائج هذه الطريقة أدق من الطريقة السابقة لأن طريقة الرافعة تهمل تكرار الفئة المنوالية، أما طريقة بيرسون فتأخذها فى الاعتبار .

(2) الطريقة البيانية لإيجاد المنوال :

تتلخص هذه الطريقة فى رسم المدرج التكرارى (علاقة بين الفئات والتكرار) ومن تكرار الفئة المنوالية والسابقة واللاحقة لها يتم إيجاد المنوال، ويتم إيصال الركن الأيمن للفئة المنوالية بالركن الأيمن للفئة السابقة لها وإيصال الركن الأيسر للفئة المنوالية بالركن الأيسر للفئة اللاحقة لها وعند تقاطع الخطين المتصلين بالأركان نسقط عمود على المحور الأفقى الممثل للفئات فنحصل على قيمة تقريبية للمنوال وذلك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : أوجد المنوال بيانياً من الجدول التكرارى للمثال السابق

الحل : نحدد الفئة المنوالية والسابقة لها واللاحقة لها ورسم مدرج تكرارى للثلاث فئات كما يلى :



حساب المنوال من الجداول غير المنتظمة :

عند حساب المنوال من الجداول غير المنتظمة يلزم تعديل التكرار أولاً بالحصول على التكرار المعدل وذلك قبل تحديد الفئة المنوالية ثم يكمل الحل بإحدى الطرق السابقة، ويكون التكرار المعدل مساوياً للتكرار الأصلى مقسوماً على طول الفئة. وتكون الفئة المنوالية هى المقابلة لأكبر تكرار معدل .

مثال : أوجد قيمة المنوال من الجدول التكرارى التالى :

ف	-10	-12	-14	-15	20-18	المجموع
ك	10	20	40	30	20	120

الحل : يلاحظ أن هذا الجدول غير منتظم ولذلك يلزم أولاً الحصول على التكرار المعدل كما يلى :

$\bar{ك}$	ل	ك	ف
5	2	10	-10
10	2	20	-12
40	1	40	-14
10	3	30	-15
10	2	20	20-18
		120	المجموع

التكرار المعدل ← $\bar{ك}$

الفئة المنوالية وهى التى تقابل أكبر تكرار معدل وهو 40

وتكون الفئة المنوالية هى 14-15 وبالتالى فإن

الحد الأدنى للفئة المنوالية = 14

تكرار الفئة المنوالية = 40

التكرار السابق للفئة المنوالية = 10

التكرار اللاحق للفئة المنوالية = 10

طول الفئة المنوالية (ل) = 1

$ف_1 = 40 - 10 = 30$

$ف_2 = 40 - 10 = 30$

$$\text{المنوال} = 14 + \frac{30}{30 + 30} \times 1$$

$$= 14 + \frac{1}{2} = 14.5$$

العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية

توجد عدة علاقات بين مقاييس النزعة المركزية الثلاثة السابق ذكرها ، **وتتوقف هذه العلاقة على تماثل التوزيع أو التواءه كما يتضح فيما يلى :**

1- إذا كان التوزيع متماثلاً فإن

الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال.

2- إذا كان التوزيع غير متماثل أو ملتوى فإن :

أ – إذا كان التوزيع ملتوى ناحية اليسار فإن :

الوسط الحسابى < الوسيط < المنوال

ب- إذا كان التوزيع ملتوى ناحية اليمين فإن

الوسط الحسابى > الوسيط > المنوال

3- الوسط الحسابى × 2 = 3 × الوسيط - المنوال

ومنها الوسط الحسابى = $\frac{\text{3 الوسيط – المنوال}}{2}$

4- المنوال = 3 × الوسيط – 2 × الوسطا الحسابى

5- المتوسط – المنوال = 3 (المتوسط – الوسيط)

رابعاً : الوسط الهندسى Geometric Mean

إذا كان لدينا مجموعة من القيم يرمز لها بالرمز $س_1$، $س_2$، ...$س_ن$ فإن الوسط الهندسى لهذه المجموعة من القيم يمكن حسابه من الصيغة الرياضية التالية:

الوسط الهندسى $س_{هـ} = \sqrt[ن]{س_1 \times س_2 \times \ldots س_ن}$ .... (أ)

حيث ن هى عدد القيم

أى إنه يساوى الجذر النونى لحاصل ضرب مجموعة القيم المعطاة بالعدد ن .

ويمكن باستخدام اللوغاريتمات اختصار العمليات الحسابية المعقدة فإذا رمزنا للوسط الهندسى بالرمز هـ ونأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن

$$لو_{هـ} = لو\,(س_1 \times س_2 \times \ldots س_ن)^{\frac{1}{ن}} \quad \ldots\ldots\ (ب)$$

ومن خصائص اللوغاريتمات $لو\,أ^{ب} = ب\,لو\,أ$

، $لو\,أ \times ب = لو\,أ + لو\,ب$

وتطبيق هاتين الخاصيتين على المعادلة (ب) ينتج

$$لوهـ = \frac{1}{ن}\,(لوس_1 + لوس_2 + \ldots لوس_ن)$$

$$= \frac{1}{ن}\ مجـ\ لوس$$

وذلك يعنى أن لوغاريتم الوسط الهندسى لمجموعة من القيم يساوى الوسط الحسابى للوغاريتمات هذه القيم .

مثال : أوجد الوسط الهندسى لمجموعة القيم 60 , 55 , 70 , 62 ,67

الحل : $لوهـ = \frac{1}{5}\,(لو60 + لو50 + لو70 + لو62 + لو67)$

$$= \frac{1}{5}(1.83 + 1.79 + 1.84 + 1.74 + 1.77)$$

$$= \frac{1}{5}(8.98) = 1.80$$

وبالنظر فى جداول الأعداد المقابلة ينتج أن هـ = 62.60 تقريباً .

حل آخر : يمكن حل التمرين السابق مباشرة باستخدام المعادلة (أ) لحساب الوسط الهندسى .

$$هـ = \sqrt[5]{67 \times 62 \times 70 \times 50 \times 60}$$

$$= \sqrt[5]{959547000} = (959547000)^{\frac{1}{5}}$$

= 62.58 تقريباً

ملحوظة : للحصول على الجذر الخامس لهذا الرقم باستخدام الآلة الحاسبة نتبع الخطوات التالية :

1- نكتب الرقم المطلوب إيجاد الجذر الخامس له فى الآلة الحاسبة .

2- نتك على زرار [INV] أو [Shift] فى الآلة الحاسبة

3- نتك على زرار [X]

4- نكتب 0.2 وهى قيمة $\frac{1}{5}$

5- نتك على علامة [=] فنحصل على الجذر المطلوب

للتدريب : أوجد $\sqrt[5]{32}$ (الحل 20)

أوجد $\sqrt[5]{243}$ (الحل 3)

ملحوظة : الوسط الهندسى هو الوسط المثالى فى حالة حساب متوسط النسب أو المعدلات .

طريقة أخرى لاستخدام الماكينة أو الآلة الحاسبة :

1- نكتب الرقم المطلوب إيجاد جذره وليكن جذر (ن) .

2- نتك على زرار [INV] أو [Shift]

3- نتك على زرار [÷] نكتب دليل الجذر أو قيمة (ن)

4- نتك على علامة [=] فنحصل على المطلوب

للتدريب : أوجد $\sqrt[7]{150}$ (الحل 2.0458)

أوجد $\sqrt[8]{260}$ (الحل 2.0038)

أوجد $\sqrt[12]{4658}$ (الحل 2.0215)

ملحوظة : إذا كانت هـ = $\sqrt[ن]{س}$ حيث ن تسمى دليل الجذر

فإن هـ = $(س)^{\frac{1}{ن}}$ حيث $\frac{1}{ن}$ تسمى الأس

وبمعلومية الخاصية مقام الأس = دليل الجذر فإنه يمكننا تحويل أى جذر فمثلاً :

$\sqrt[10]{س} = (س)^{\frac{1}{10}}$

$\sqrt[8]{س} = (س)^{\frac{1}{8}}$ وهكذا

إيجاد الوسط الهندسى فى حالة البيانات المبوبة :

فى هذه الحالة للحصول على الوسط الهندسى يطبق القانون التالى :

$$هـ = \sqrt[مجـ ك]{س_1^{ك_1} \times س_2^{ك_2} \times ...س_ن^{ك_ن}} \quad ..... (أ)$$

حيث مجـ ك هى مجموع التكرارات

ك$_1$ .... ك$_2$ هى التكرارات

س هى مركز الفئة

ويأخذ لوغاريتم الطرفين من المعادلة (أ) فإن

$$لوهـ = لو \left[س_1^{ك_1} \times س_2^{ك_2} \times ... س_ن^{ك_ن} \right]^{\frac{1}{مجـ ك}}$$

$$= \frac{1}{مجـ ك} \left[لوس_1^{ك_1} + لوس_2^{ك_2} + ... لوس_ن^{ك_ن} \right]$$

$$= \frac{1}{مجـ ك} \left[ك_1 لوس_1 + ك_2 لوس_2 + ...ك_ن لوس_ن \right]$$

$$= \frac{مجـ ك لو س}{مجـ ك}$$

مثال : أوجد الوسط الهندسى من الجدول التكرارى التالى :

الفئات	10-	20-	30-	40-	50-60
التكرار	12	25	35	20	8

الحل : نكون الجدول التالى :

ف	ك	س	لوس	ك لوس
-10	12	15	1.176	17.640
-20	25	25	1.397	34.925
-30	35	35	1.544	54.040
-40	20	45	1.653	74.385
60-50	8	55	1.740	95.700
المجموع	100			276.69

$$\text{لوهـ} = \frac{\text{مجـ ك لوس}}{\text{مجـ ك}} = \frac{276.69}{100} = 2.7669$$

∴ هـ = 584.66

ملحوظة : لإيجاد قيمة هـ نجرى الخطوات التالية .

1- نكتب قيمة لوهـ فى الآلة الحاسبة .

2- نضغط علىIN V ثم نضغط على زرار Log فنحصل على قيمة هـ

خامساً : المتوسط الموزون :

وفى بعض الأحيان يسمى المتوسط الحسابى المرجح ويستخدم فى حالة إذا كان لبعض القيم وزناً أكثر من غيرها ، فإذا أردنا أن نأخذ الأهمية النسبية فى الاعتبار عن حساب المتوسط الحسابى فيفضل استخدام المتوسط الموزون فإذا كان لدينا القيم $س_1$، $س_2$ ، ...$س_ن$ والوزن المقابل لكل قيمة هو $و_1$، $و_2$، ..$و_ن$ فالمتوسط الحسابى الموزون لهذه القيم يعبر عنه بالعلاقة .

$$\text{الوسط الحسابى الموزون} = \frac{\text{س}_1\text{و}_1 + \text{س}_2\text{و}_2 + \dots \text{س}_\text{ن}\text{و}_\text{ن}}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3 + \dots \text{و}_\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}}$$

مثال : مصنع ملابس لدية ثلاثة أنواع من البدل الجاهزة، فإذا كان سعر البدله من النوع الأول 250 دينار ومن النوع الثانى 350 دينار ومن النوع الثالث 500 دينار، وإذا علمت أن النوع الأول يوجد منه 100 قطعة والنوع الثانى 60 قطعة والنوع الثالث 40 قطعة فأوجد متوسط سعر القطعة .

الحل :

$$\text{المتوسط الموزون} = \frac{250 \times 100 + 350 \times 60 + 500 \times 40}{100 + 60 + 40} = 330 \text{ دينار}$$

تمارين

(1) أوجد الوسط الحسابى للقيم 15 , 12 , 7 , 20 , 8 , 10 مرة بالطريقة العادية ومرة أخرى بطريقة الانحرافات ومرة ثالثة بالطريقة المختصرة .

(2) لديك جدول التوزيع التكرارى التالى

ف	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	95-85	المجموع
ك	5	10	10	25	20	15	10	5	100

أوجد : 1- الوسط الحسابى بالطريقة العادية.

2- الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات.

3- الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات المختصرة.

(3) أوجد الوسيط لمجموعتى البيانات الآتية :

مجموعة (أ) : 8,9,20,17,15

مجموعة(ب) : 30,9,25,16,18,20

(4) أوجد الوسيط من بيانات جدول التوزيع التكرارى التالى

ف	-10	-20	-30	-40	-50	70-60	المجموع
ك	10	20	30	50	40	10	160

(5) أوجد المنوال من مجموعتى البيانات الآتية :

مجموعة (أ) : 1,2,4,3,5,2

مجموعة (ب) : 1,3,5,2,3,4,5

(6) أوجد المنوال من بيانات جدول تمرين (4)

(7) أوجد قيمة المنوال من جدول التوزيع التكرارى التالى :

ف	-20	-24	-28	-30	-35	50-40	المجموع
ك	40	60	80	40	20	12	252

(8) أوجد الوسط الحسابى والوسيط والمنوال للقيم الآتية :

(أ) : 8,6,4,6,7,8,6,5

(ب): 5,12,4,12,9,6

(9) من الجدول التكرارى التالى :

ف	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	90-80	المجموع
ك	5	10	15	20	35	50	20	5	160

أوجد :1- الوسط الحسابى

2- الوسيط جبرياً وبيانياً

3- المنوال جبرياً وبيانياً

4- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسيط والمنوال

(10) احسب الوسط الهندسى للقيم 190,180,114,136,105

(11) أحد شركات الموبيل تبيع ثلاثة أنواع من الأجهزة نوكيا وأر يكسون وموتوريلا سعر القطعة من النوع الأول 1200 دينار ومن النوع الثانى 1100 دينار ومن النوع الثالث 900 دينار فإذا كان متوافر لدى الشركة 10 قطع من النوع الأول و25 قطعة من النوع الثانى و15 قطعة من النوع الثالث . فأوجد متوسط سعر القطعة من كل نوع من الأنواع الثلاثة .

الفصل الرابع

مقاييس التشتت *Dispersion*

تمهيد :

يقصد بالتشتت درجة الاختلاف أو التفاوت بين مجموعة من القيم ، فإذا كانت القيم متقاربة من بعضها يكون تشتتها أقل والعكس صحيح أى إذا كانت متباعدة عن بعضها يكون تباينها كبير.

وقد تكون مقاييس النزعة المركزية السابق ذكرها غير معبرة صراحة عن طبيعة الظاهرة محل البحث والدراسة لأنه قد يتساوى متوسط أى مجموعتين من القيم ولكن فى نفس الوقت يكون هناك اختلاف أو تباين كبير بين مفردات كل منهما مما يعطى نتائج مضللة فى حالة الاكتفاء بنتائج المتوسط فقط .

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى :

مثال : إذا كان لدينا مجموعتين من القيم

مجموعة (1) : 8 , 10 , 12 , 14 , 16

مجموعة (2) : 2 , 4 , 12 , 18 , 24

فالوسط الحسابى فى كل من المجموعتين يساوى 12 فإذا اكتفينا بالوسط الحسابى فقط لأعطينا انطباعاً بأن مجموعتى البيانات (1) ، (2) متشابهتين فى حين أن قيم المجموعة (1) أكثر تقارباً وبالتالى أقل تبايناً من قيم المجموعة (2)

فمثلاً المدى للمجموعة (1) هو 16 – 8 = 8

والمدى للمجموعة (2) هو 24 – 2 = 22

وبالتالى يقال أن المجموعة (2) أكثر تشتتاً من المجموعة (1) .

ومن أهم مقاييس التشتت :

1- المدى Range

2- الانحراف المتوسط Average Deviation

3- الانحراف الربيعى Quartile Deviation

4- الانحراف المعيارى Standard Deviation

5- معامل الاختلاف Coefficient of Variation

أولاً : المدى Range

هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها فى الحساب، ويعرف بأنه عبارة عن الفرق بين أكبر وأقل قيمة من بين مفردات القيم . ويعتبر المدى أقل مقاييس التشتت استخداماً لاعتماده على قيمتين فقط فى حسابه لذا فقد يعطى بيانات مضلله فى حالة وجود قيم شاذة متطرفة. بالإضافة إلى صعوبة حسابه من الجداول المفتوحة مما يلزم الرجوع للقيم الأصلية .

ثانياً : الانحراف الربيعى Quartile Deviation

ويطلق عليه فى بعض الأحيان نصف المدى الربيعى . ويستخدم هذا المقياس لمعالجة عيوب المدى وأهمها تأثره بالقيم الشاذة والمتطرفة ، كما أنه المقياس التشتتى الوحيد الذى يستخدم فى حالة البيانات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى مفتوح . ويعبر عن نصف المدى الربيع بالصيغة الرياضة التالية :

$$\text{نصف المدى الربيعى} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

ويمكن الحصول عليه بيانياً من خلال رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط وباستخراج قيمة الربيع الأعلى والأدنى يتم حساب نصف المدى الربيعى . وطريقة حساب الربيع الأدنى والربيع الأعلى لا تختلف عن طريقة حساب الوسيط والذى يسمى فى بعض الأحيان باسم الربيع الأوسط . ويرمز للربيع الأدنى بالرمز($ر_1$) وللوسيط بالرمز($ر_2$) وللربيع الأعلى بالرمز($ر_3$).

(أ) الربيع الأدنى ($ر_1$) Lower Quartile

يعرف بأنه القيمة التى تقسم قيم الظاهرة إلى جزئين بحيث يقع 25% من القيم قبلها و 75% من القيم بعدها . وخطوات حسابه كالآتى :

1- ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4}$

2- نحدد فئة الربيع الأدنى من جدول التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط .

3- نطبق القانون التالى لحسابه .

الربيع الأدنى = الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى

$$+ \left[\frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى} - \text{ت م ص السابق لترتيب الربيع الأدنى}}{\text{ت م ص اللاحق} - \text{ت م ص السابق}} \right]$$

× طول فئة الربيع الأدنى

مثال : من جدول التوزيع التكرارى التالى أوجد الربيع الأدنى .

ف	20-	30-	40-	50-	60-	70-80	المجموع
ك	10	15	30	22	14	9	100

الحل أولاً : نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد

الفئات	التكرار المتجمع	
أقل من 20	0	
أقل من 30	10	
أقل من 40	25	← ر1
أقل من 50	55	← ر2
أقل من 60	77	← ر3
أقل من 70	91	
أقل من 80	100	

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{\text{مجـ ك}}{4} = \frac{100}{4} = 25$

فئة الربيع الأدنى 40 - 50

الربيع الأدنى = $40 + \frac{25-10}{55-10} \times 10$

= 43.33 تقريباً

(ب) الربيع الأعلى ($ر_3$) Upper Quartile

هو القيمة التى تقسم مجموعة القيم إلى قسمين بحيث يقع 75% من القيم قبلها و 25% من القيم بعدها .

وخطوات حساب الربيع الأعلى هى نفسها خطوات حساب الربيع الأدنى مع الاختلاف فى ترتيب الربيع الأعلى وقانون الربيع الأعلى هو :

ترتيب الربيع الأعلى = مجـ ك × ¾

الربيع الأعلى = الحد الأعلى لفئة الربيع الأعلى

$$+ \left[\frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى} - \text{ت م ص السابق لترتيب الربيع الأعلى}}{\text{ت م ص اللاحق} - \text{ت م ص السابق}} \right]$$

× طول فئة الربيع الأعلى

مثال : احسب الربيع الأعلى من المثال السابق.

الحل : ترتيب الربيع الأعلى = مجـ ك × ¾

$$= 100 \times \frac{3}{4} = 75$$

فئة الربيع الأعلى = 50 - 60

$$\text{الربيع الأعلى} = 50 + \frac{75 - 55}{77 - 55} \times 10$$

= 59.09 تقريباً

مثـال أوجـد الانحـراف الربيعـى مـن بيانـات جـدول التوزيـع التكرارى السابق .

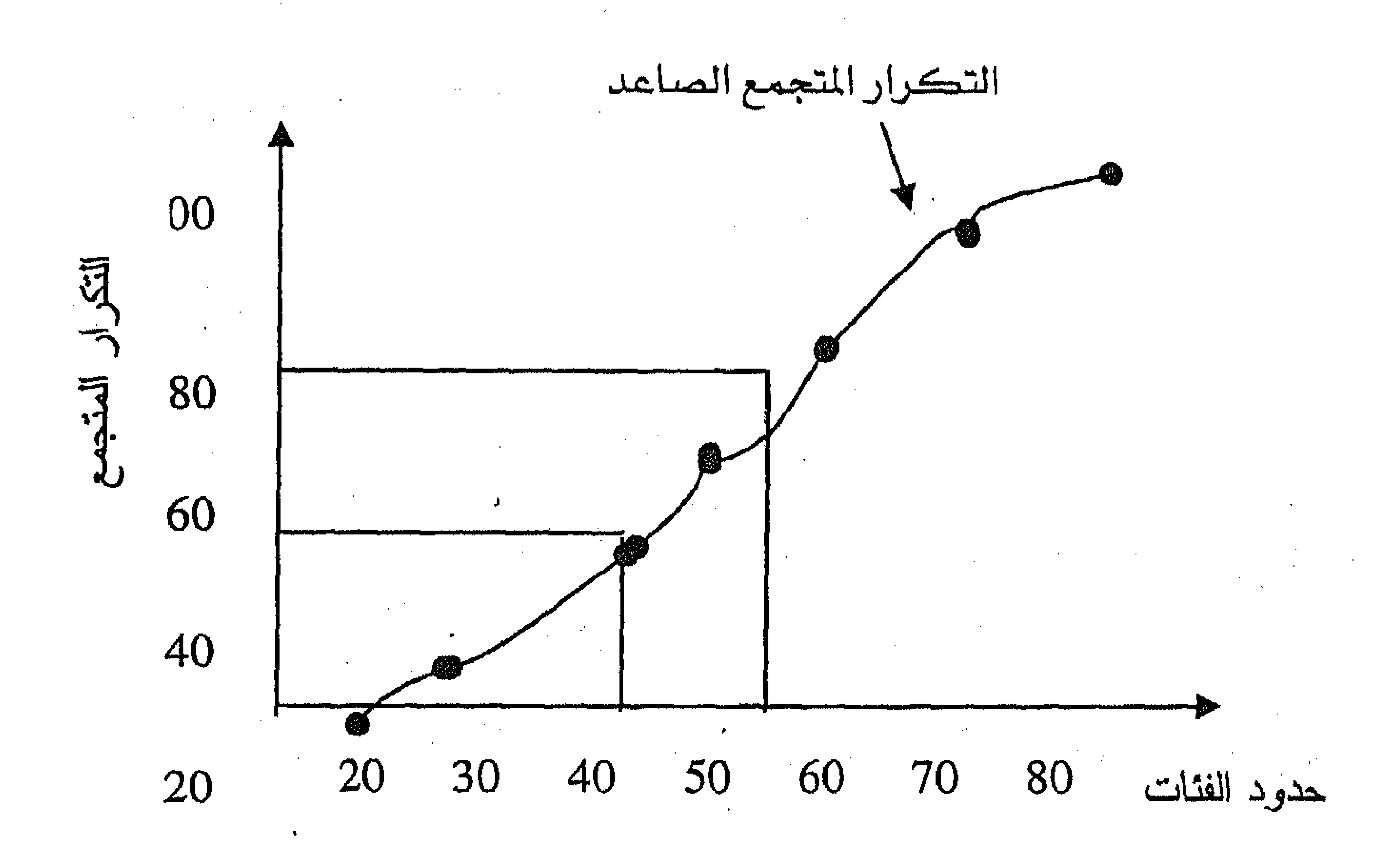
$$\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

الحل : الانحراف الربيعى = $\frac{\text{الربيغ الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$

$$= \frac{59.09 - 43.33}{2} = 7.88$$

إيجاد الربيعين بيانياً :

لإيجاد قيمة الربيع الأدنى نعين ترتيبه على المحور الرأسى الذى يمثل التكرار المتجمع الصاعد ثم نرسم خطاً أفقياً ليقابل المتجمع الصاعد فى نقطه ، نسقط منها عموداً على المحور الأفقى الذى يمثل حدود الفئات لنحصل على قيمة الربيع الأدنى . ولإيجاد قيمة الربيع الأعلى نحدد ترتيبه على المحور الرأسى ونتبع نفس الطريقة لتعيين قيمته على المحور الأفقى فنجد قيمته = 59.09 كما يتضح من الرسم .



ثالثاً : الانحراف المتوسط Mean Deviation

ويعرف بأنه متوسط القيمة العددية لانحرافات القيم عن وسطها الحسابى . وهذا المقياس مؤشر لمدى تقارب أو تباعد مجموعة من القيم عن وسطها الحسابى.

ويمكن حساب الانحراف المتوسط من القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة .

(أ) حساب الانحراف المتوسط من القيم المطلقة :

الانحراف المتوسط = $\frac{1}{\text{ن}}$ مجـ $|\text{س} - \bar{\text{س}}|$

حيث ن = عدد القيم

وأن القيمة العددية لأى عدد سالب = موجب نفس العدد

أى $|-4| = 4$

مثال : احسب الانحراف المتوسط للقيم 4 , 5 , 8 , 3

$$\bar{\text{س}} = \frac{3+8+5+4}{4} = 5$$

القيم (س)	$\|\text{س} - \bar{\text{س}}\|$
4	1 = 5 – 4
5	0 = 5 – 5
8	3 = 5 – 8
3	2 = 5 – 3
المجموع	**6**

الانحراف المتوسط = $\frac{6}{4} = 1.5$

(ب) حساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة :

لحساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة نتبع الخطوات التالية :

1- نحسب الوسط الحسابى من جدول التوزيع التكرارى بأحد الطرق الثلاثة السابق ذكرها

$$\text{وليكن } \bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ س}}$$

2- نحسب القيمة العددية لانحرافات مركز كل فئة عن الوسط الحسابى أى نحصل على $|س - \bar{س}|$

3- نضرب $|س - \bar{س}|$ فى تكرار كل فئة ثم نحصل على

مجـ ك $|س - \bar{س}|$

4- نطبق العلاقة التالية للحصول على الانحراف المتوسط

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ ك } |س - \bar{س}|}{\text{مجـ ك}}$$

مثال : احسب الانحراف المتوسط من جدول التوزيع التكرارى التالى

ف	-10	-20	-30	-40	60-50	المجموع
ك	5	15	50	20	10	100

الحل

الفئات	التكرار	س	س ك	$\|س - \bar{س}\|$	ك $\|س - \bar{س}\|$
-10	5	15	75	21.5	107.5
-20	15	25	375	11.5	172.5
-30	50	35	1750	1.5	75.0
-40	20	45	900	8.5	170
60-50	10	55	550	18.5	185
المجموع	100		3650		710

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{3650}{100} = 36.50$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ ك} \left| \text{س} - \bar{\text{س}} \right|}{\text{مجـ ك}} = \frac{710}{100} = 7.1$$

رابعا: الانحراف المعيارى Standard Deviation

وهو من أهم مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وذلك لدخوله فى حساب كثير من المقاييس الإحصائية الأخرى. وهو يشبه الانحراف المتوسط فى اعتماده على كل قيم المجموعة ونحصل عليه بتربيع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى (بدلاً من إهمال الإشارة كما فى حالة الانحراف المتوسط) وبذلك نحصل على مقياس آخر للتشتت يسمى بالتباين Variance ويرمز له بالرمز ع^2

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$$

وهو عبارة عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى وللحصول على الانحراف المعيارى نحصل على الجذر التربيعى للتباين .

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$$

أى أن الانحراف المعيارى (ع) هو الجذر التربيعى للتباين (ع^2) ويمكن حساب الانحراف المعيارى من القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة .

أولاً : القيم المطلقة :

1- حساب الانحراف المعيارى بالطريقة المطولة باستخدام القيم المطلقة :

يتضح مما سبق أن حساب التباين بالطريقة السابقة يحتاج إلى عمليات حسابية كثيرة ومعقدة خاصة إذا احتوى الوسط الحسابى $\overline{س}$ على كسور مما يتبعه احتواء انحرافات القيم عن وسطها الحسابى $(س - \overline{س})$ على كسور أيضاً ومن ثم صعوبة حساب مربعاتها ، لذلك من المفضل استخدام طريقة أخرى لحساب التباين لا تتضمن حسابات كثيرة ومعقده وهذه الطريقة هى :

$$ع^2 = \frac{مجـ س^2}{ن} - \left[\frac{مجـ س}{ن}\right]^2$$

أى أن التباين هو (متوسط المربعات – مربع المتوسط)

وبالتالى فإن الانحراف المعيارى يكون :

$$ع^2 = \sqrt{\frac{مجـ س^2}{ن} - \left[\frac{مجـ س}{ن}\right]^2}$$

وتسمى هذه الطريقة باسم الطريقة المطولة

مثال : اثبت أن مجـ $(س - \overline{س})^2$ =

$$= \frac{مجـ س^2}{ن} - \left[\frac{مجـ س}{ن}\right]^2$$

الحل : مجـ $(س - \overline{س})^2$ = مجـ $(س^2 - 2 س\overline{س} + \overline{س}^2)$

$= مجـ س^2 - 2 \overline{س} مجـ س + ن \overline{س}^2$

$$= \text{مجـ س}^2 = \frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} + \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

$$= \text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

وبضرب الطرفين فى 1 / ن

$$\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left[\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right]^2$$

مثال : أوجد الانحراف المعيارى للقيم الآتية : 4 , 5 , 8 , 3

الحل : $\bar{\text{س}} = \frac{3+8+5+4}{4} = 5$

س	س - $\bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$
4	1-	1
5	0	0
8	3	9
3	2-	4
المجموع		14

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = 1.87$$

حل آخر :

	س	$س^2$
	4	16
	5	25
	8	64
	3	9
المجموع	20	114

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{114}{4} - \left(\frac{20}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{28.5 - 25} = \sqrt{3.5} = 1.87$$

2- حساب الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات :

وفيها يتم اختيار وسط فرضى بدلاً من الوسط الحسابى، ثم نستخدم القانون التالى لحساب الانحراف المعيارى .

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^2}$$

حيث ح = س − و

س ← قيمة المشاهدة

و ← الوسط الفرضى

مثال : احسب الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات من بيانات المثال السابق .

الحل : البيانات هى 4 , 5 , 8 , 3

نفرض أن الوسط الفرضى و = 5

س	ح = س − و	$ح^2$
4	1-	1
5	0	0
8	3	9
3	2-	4
المجموع	0	14

$$= \frac{14}{4} - \left(\frac{0}{4}\right)^2 = \sqrt{\frac{14}{4}} = 1.87$$

3- حساب الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات المختصرة :

ومن خلال هذه الطريقة يتم قسمة الانحرافات (ح) على رقم ثابت كعامل مشترك ثم نستخدم هذه البيانات فى الحصول على الانحراف المعيارى من خلال تطبيق القانون التالى :

$$ع = ث \times \sqrt{\frac{مجـ\ ح^2}{ن} - \frac{(مجـ\ ح)^2}{ن}}$$

حيث ث هى العامل المشترك ، ح $= \frac{ح}{ث}$

مثال : أوجد الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات المختصرة للقيم

145 , 140 , 135 , 130 , 125

الحل

قيم س	ح = س − **130**	ح = $\frac{ح}{ث}$	$ح^2$
125	5-	1-	1
130	0	0	0
135	5+	1	1
140	10+	2	4
145	15+	3	9
المجموع	25	5	15

$$ع = ث \times \sqrt{\frac{مجـ\ ح^2}{ن} - \frac{(مجـ\ ح)^2}{ن}}$$

$$ع = 5\sqrt{\frac{15}{5} - \frac{5}{5}}$$

$$= 5\sqrt{3 - 1}$$

$$= 5\sqrt{2} = 7.07$$

ثانياً : البيانات المبوبة :

1- حساب الانحراف المعيارى بالطريقة المطولة :

يمكن حساب الانحراف المعيارى من البيانات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى بالطريقة المطولة كما يأتى .

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ } س^2 ك}{\text{مجـ } ك} - \left(\frac{\text{مجـ } س ك}{\text{مجـ } ك}\right)^2}$$

حيث س هى مركز الفئة ، ك هى التكرار

مثال : احسب الانحراف المعيارى بالطريقة المطولة من بيانات الجدول التكرارى:

ف	-90	-100	-110	-120	-130	150-140	المجموع
ك	3	14	16	11	4	2	50

الحل : نكون الجدول التالى :

ف	ك	س	س ك	$س^2$ ك
-90	3	95	285	27075
-100	14	105	1470	154350
-110	16	115	1840	211600
-120	11	125	1375	171875
-130	4	135	540	72900
150-140	2	145	290	42050
المجموع	50		5800	679850

$$ع = \sqrt{\frac{679850}{50} - \left(\frac{5800}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{13597 - 13456}$$

$$= \sqrt{141} = 11.9 \text{ تقريباً}$$

2- حساب الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات :

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن اختيار وسط فرضى (و) من بين مراكز الفئات (س) وتحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضى ويتم حساب الانحراف المعيارى من الصيغة التالية :

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}^2\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^2}$$

ويلاحظ من هذه الصيغة أنه تتبع نفس الخطوات السابق ذكرها عند حساب الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات ثم يزداد على ذلك عمود واحد هو $ح^2$ ك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : احسب الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات من بيانات المثال السابق .

الحل :

ف	ك	س	ح = س - و	ح × ك	$ح^2$ × ك
-90	3	95	20-	60-	1200
-100	14	105	10-	140-	1400
-110	16	115	0	0	0
-120	11	125	10	110	1100
-130	4	135	20	80	1600
150-	2	145	30	60	1800
140					
المجموع	50			50	7100

لاحظ أننا اخترنا القيمة 115 كوسط فرضى، والوسط الفرضى عادة يكون مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار.

$$ع = \sqrt{\frac{7100}{50} - \left(\frac{50}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{142 - 1} = 11.9$$ وهى نفس القيمة السابقة

3- حساب الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات المختصرة :

فى حالة التوزيعات المنتظمة ذات أطوال الفئات المتساوية يمكن استخدام الانحرافات المختصرة وذلك بقسمة انحرافات القيم عن الوسط الفرضى على طول الفئة (ل) . ويمكن الحصول على الانحراف المعيارى من الصيغة التالية :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ \bar{ح}^2\ ك}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ \bar{ح}\ ك}{مجـ\ ك}\right)^2}$$

حيث ل : طول الفئة

$$\bar{ح} = \frac{ح}{ل} \quad ، \quad ح = س - و$$

مثال : احسب الانحراف المعيارى بطريقة الانحرافات المختصرة

من بيانات المثال السابق :

الحل :

ف	ك	س	ح	$\bar{ح}$	$\bar{ح}$ ك	$\bar{ح}^2$ ك
-90	3	95	20-	2-	6-	12
-100	14	105	10-	1-	14-	14
-110	16	115	0	0	0	0
-120	11	125	10	1	11	11
-130	4	135	20	2	8	16
150- 140	2	145	30	3	6	18
المجموع	50				5	71

$$ع = 10 \times \sqrt{\frac{71}{50} - \left(\frac{50}{50}\right)}$$

$$= 10 \times \sqrt{1.41} = 11.9$$ تقريباً وهى نفس القيمة السابقة

خامساً : معامل الاختلاف Coefficient of Variation

وهو مقياس إحصائى وصفى يستخدم للحكم على مدى التشتت بين مجموعتين انحرافهما المعيارى متساوى . ويطلق على معامل الاختلاف اسم مقياس التشتت النسبى ويستخدم أيضاً فى المقارنة بين نتائج ظاهرتين خاصة إذا كان التمييز بينهما مختلف .

ويتم استخدام أى من القوانين التالية فى حساب معاملا الاختلاف :

(1) معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}} \times 100$

أو

(2) معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}} \times 100$

أو

(3) معامل الاختلاف = $\frac{\text{نصف المدى الربيعى}}{\text{متوسط الربيعين}} \times 100$

$$= \frac{\text{ر}_3 - \text{ر}_1}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1} \times 100$$

ملحوظة : من فوائد معامل الاختلاف أنه يستخدم فى المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر إذا كان كل منهما مقاس بوحدات تختلف عن وحدات قياس الآخر لأنه مقياس نسبى لا يميز كما هو الحال فى

مقاييس التشتت الأخرى حيث تكون مميزة بنفس وحدات التمييز الأصلية .

مثال : احسب معامل الاختلاف من جدول التوزيع التكرارى للمثال السابق .

الحل :

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}} \times 100$$

الانحراف المعيارى = 11.9 من المثال السابق

$$\text{الوسط الحسابى} = \text{و} + \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ل}$$

$$= 115 + \frac{5}{50} \times 10 = 116$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{11.9}{116} \times 100 = 10.26\ \%\ \text{تقريباً}$$

مثال : أيهما أقل تشتت من المجموعتين (1) ، (2) حيث

مجموعة (1) : 8 , 10 , 12

مجموعة (2) : 98 , 100 , 102

$$\text{الحل : } \bar{\text{س}}_1 = \frac{12 + 10 + 8}{3} = 10$$

$$\bar{س}_2 = \frac{98 + 100 + 102}{3} = 100$$

$$ع_1 = \sqrt{\frac{مجـ\,س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ\,س}{ن}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{308}{3} - \left(\frac{30}{3}\right)^2} = 1.63$$

$$ع_2 = \sqrt{\frac{3008}{3} - \left(\frac{30}{3}\right)^2} = 1.63$$

$$خ_1 = \frac{1.63}{10} \times 100 = 16.3\%$$

$$خ_2 = \frac{1.63}{10} \times 100 = 1.63\%$$

∴ يلاحظ أن بيانات المجموعة (2) أقل تشتتاً من بيانات المجموعة (1) بالرغم من تساويهما فى الانحراف المعيارى .

تمارين

(1) أوجد المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعيارى للقيم التالية :

22 , 14 , 11 , 8 , 5

(2) احسب الانحراف المتوسط والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف من جدول التوزيع التكرارى التالى .

الفئات	-30	-40	-50	-60	80-70	المجموع
التكرار	9	22	36	25	8	100

(3) فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجة 100 طالب فى مادة الإحصاء .

الفئات	-50	-60	-70	-80	100-90	المجموع
التكرار	3	10	18	40	29	100

والمطلوب إيجاد :

1- الربيع الأدنى والربيع الأعلى حسابياً وبيانياً .

2- معامل الاختلاف بطريقتين مختلفتين .

(4) احسب الانحراف المعيارى والانحراف المتوسط من بيانات جدول التوزيع التكرارى للتمرين السابق .

(5) فيما يلى إنتاجية مساحات مختلفة من القطن والكتان موزعة فى شكل جدول توزيع تكرارى كالآتى :

المسافة بالأفدنة	-30	-40	-50	-60	-70	90-80
إنتاج القطن بالطن	8	16	20	24	20	12
إنتاج الكتان بالطن	4	8	10	12	10	6

والمطلوب مقارنة تشتت الإنتاجية لكل من محصولى القطن والكتان .

(6) من الجدول التكرارى التالى

الفئات	-4	-8	-12	-16	-20	-24	32-28
التكرار	2	3	20	40	20	10	50

والمطلوب : إيجاد مقياس للتشتت ومعامل الاختلاف .

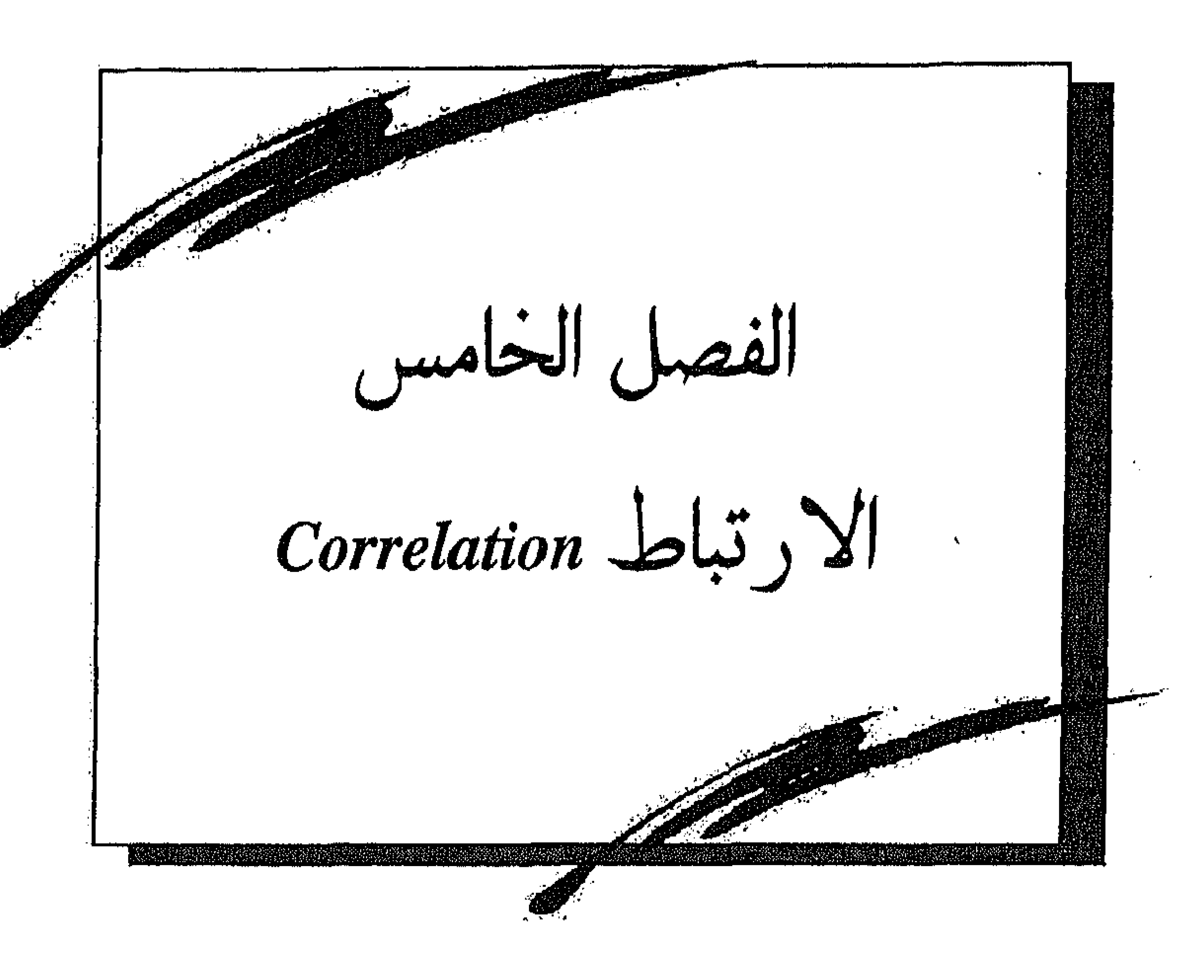
(7) أوجد نصف المدى الربيعى والمنوال حسابياً وبيانياً من جدول التوزيع التكرارى للتمرين رقم (6) .

(8) أظهرت نتيجة امتحان طلبة الفرقة الثالثة كلية الآداب فى مادة الإحصاء ومادة الاجتماع عن الآتى .

	الإحصاء	الاجتماع
الوسط الحسابى لدرجة الطلاب	84	68
الانحراف المعيارى لدرجة الطلاب	7	17

والمطلوب مقارنة تشتت الدرجات فى مادتى الإحصاء والاجتماع .

(9) إذا كان متوسط أجر المرأة العاملة فى أحد المصانع هو 300 دينار شهرياً بانحراف معيارى قدره 18 دينار ومتوسط أجر الرجل فى نفس المصنع 400 دينار شهرياً بانحراف معيارى قدره 15 دينار ، وضح أيهما أكثر تشتت أجر المرأة أم أجر الرجل .



الفصل الخامس

الارتباط *Correlation*

تمهيد:

مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت السابق ذكرها من المقاييس الإحصائية التى تصف متغيراً واحداً ، بينما يختص الارتباط بقياس العلاقة بين متغيرين ويتم قياس هذه العلاقة من خلال مقياس يطلق عليه معامل الارتباط Correlation Coefficient .

ونتيجة معامل الارتباط تحدد قوة واتجاه العلاقة بين المتغيرين موضع الدراسة فإذا كانت إشارة معامل الارتباط موجبة دل ذلك على العلاقة الطرديه بين المتغيرين بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يؤدى إلى زيادة المتغير الآخر . بينما إذا كانت إشارة معامل الارتباط سالبة دل ذلك على العلاقة العكسية بين المتغيرين بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين تؤدى إلى نقص المتغير الآخر .

وتنحصر قيمة معامل الارتباط بين ± 1 فإذا رمزنا لمعامل الارتباط بالرمز ر فإن ر لها الدرجات التالية :

(1) ر = ± 1 يوجد ارتباط تام طردى أو عكس

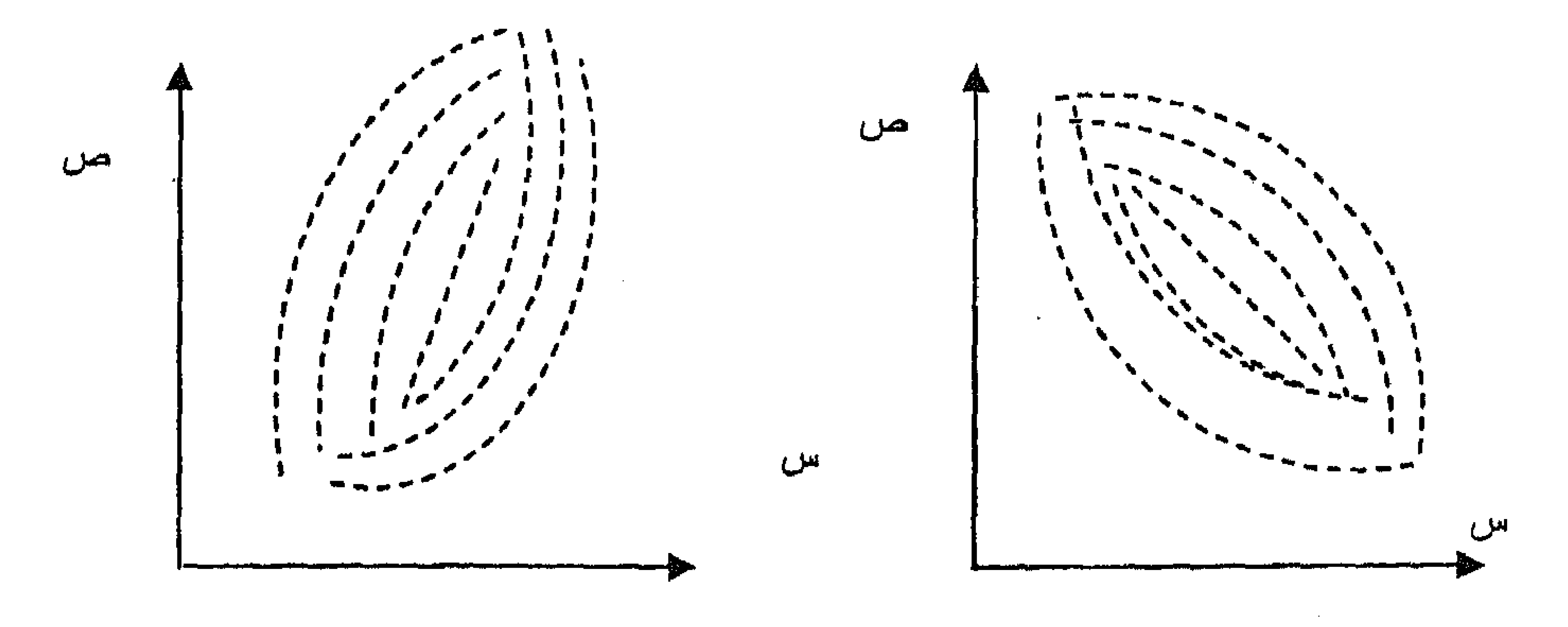
(2) $0.7 <$ ر < 1 يوجد ارتباط قوى طردى أو عكس

(3) $0.4 <$ ر < 0.7 يوجد ارتباط وسط طردى أو عكس

(4) صفر $<$ ر < 0.7 يوجد ارتباط ضعيف طردى أو عكس

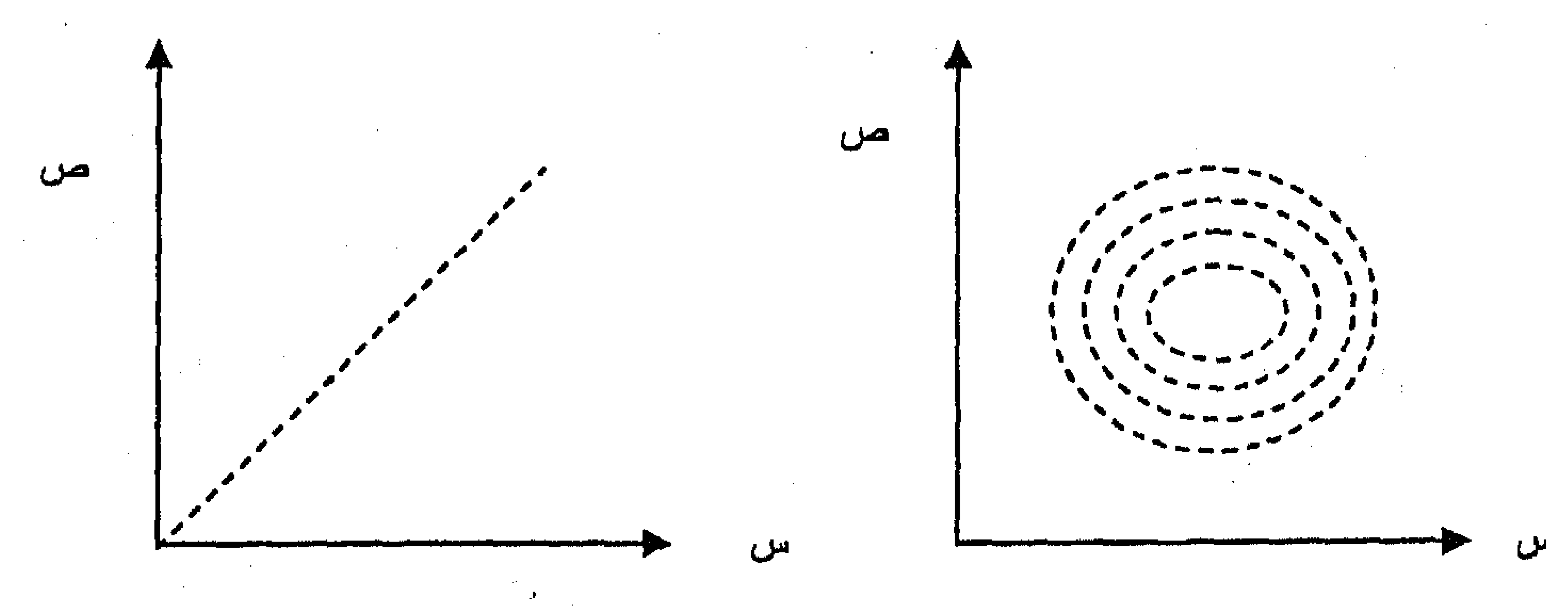
(5) ر = صفر لا يوجد ارتباط بين المتغيرين .

ويمكن الاستعانة بالتمثيل البيانى لقيم المتغيرين موضع الدراسة لاستخدام شكل الانتشار لمعرفة اتجاه العلاقة بينهما كما يتضح من الأشكال البيانية التالية :



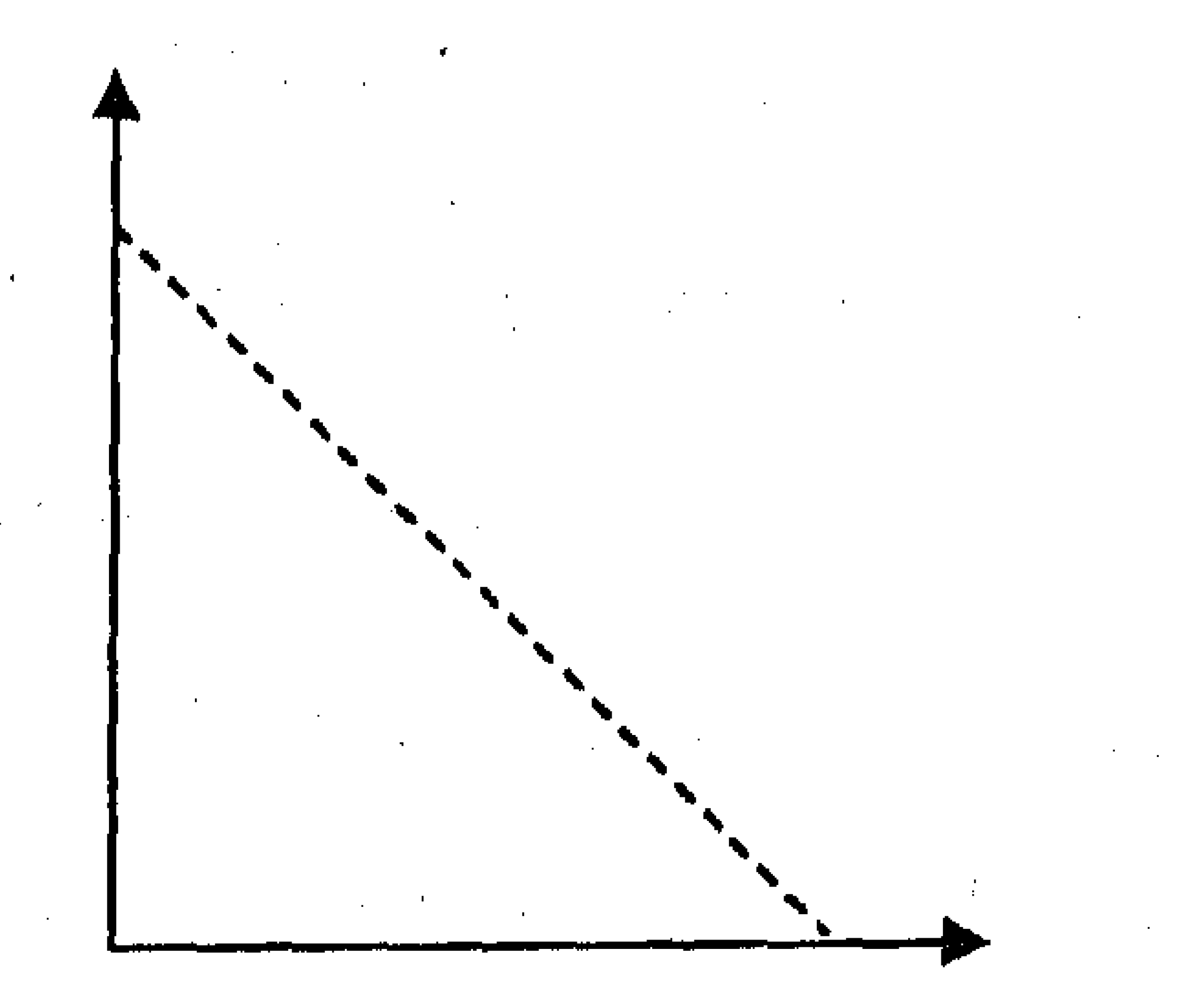
علاقة عكسية بين قيم س ، ص
ومعامل الارتباط يأخذ قيمة سالبة

علاقة طردية بين قيم س ، ص
ومعامل الارتباط يأخذ قيمة موجبة



عدم وجود ارتباط بين قيم س ، ص
ومعامل الارتباط يأخذ قيمة صفر

علاقة طردية تامة بين قيم س ، ص
ومعامل الارتباط يأخذ قيمة الواحد



علاقة عكسية تامة بين قيم س ، ص
وقيمة معامل الارتباط = -1

خصائص معامل الارتباط :

1- إذا أضيف أو طرح مقدار ثابت من قيم المتغيرين س ، ص المراد تقدير معامل الارتباط لهما فإن ذلك لا يؤثر على حساب معامل الارتباط وتستخدم هذه الخاصية فى استخدام الطرق المختزلة لحساب معامل الارتباط .

2- إذا تم ضرب أو قسمة قيم المتغيرين س ، ص فى مقدار ثابت فإن ذلك لا يؤثر أيضاً على معامل الارتباط .

حساب معامل الارتباط الخطى (بيرسون) :

يستخدم معامل الارتباط لقياس العلاقة بين الظواهر الكمية كما فى التالى :

(1) حساب معامل الارتباط للقيم المطلقة :

إذا فرض أن لدينا قيم المتغيرين س ، ص فإنه يمكن قياس الارتباط بينهما وفقاً لمعامل ارتباط بيرسون نسبة إلى العالم بيرسون

$$\text{حيث ر} = \frac{\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \text{س ص}}{\text{ع}_{\text{س}}\,\text{ع}_{\text{ص}}}$$

$$\text{حيث ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2}$$ الانحراف المعيارى لقيم س

حيث $ع_{ص} = \sqrt{\frac{مجـ ص^2}{ن} - \left(\frac{مجـ ص}{ن}\right)^2}$ الانحراف المعيارى لقيم ص

كما يمكن حساب معامل الارتباط وفقاً للصيغ التالية:

(2) **طريقة الانحرافات البسيطة** : وتستخدم الصيغة التالية لحساب (ر)

$$ر = \frac{ن\ مجـ ح_{س} ح_{ص} - (مجـ ح_{س})(مجـ ح_{ص})}{\sqrt{ن\ مجـ ح^2_{س} - (مجـ ح_{س})^2}\ \sqrt{ن\ مجـ ح^2_{ص} - (مجـ ح_{ص})^2}}$$

حيث $ح_{س}$ تمثل انحراف قيم س عن الوسط الفرضى (أ) = س - أ

$ح_{ص}$ تمثل انحراف قيم ص عن الوسط الفرضى (ب) = ص — ب

(3) **طريقة الانحرافات المختصرة** :

يمكن الحصول على الصيغة المختصرة وذلك بقسمة $ح_{س}$ على عامل مشترك وكذلك $ح_{ص}$ وتستخدم العلاقة التالية لحساب قيمة (ر) :

$$ر = \frac{ن\ مجـ \bar{ح}_{س} \bar{ح}_{ص} - (مجـ \bar{ح}_{س})(مجـ \bar{ح}_{ص})}{\sqrt{ن\ مجـ \bar{ح}^2_{س} - (مجـ \bar{ح}_{س})^2}\ \sqrt{ن\ مجـ \bar{ح}^2_{ص} - (مجـ \bar{ح}_{ص})^2}}$$

مثال : أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص

س	1	2	3	4	5
ص	3	5	7	9	11

الحل :

	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
	1	3	3	1	9
	2	5	10	4	25
	3	7	21	9	49
	4	9	36	16	81
	5	11	55	25	121
المجموع	15	35	125	55	285

$$\therefore ر = \frac{ن \text{ مجـ } س ص - (\text{مجـ } س)(\text{مجـ } ص)}{\sqrt{(ن \text{ مجـ } س^2 - (\text{مجـ } س)^2)(ن \text{ مجـ } ص^2 - (\text{مجـ } ص)^2)}}$$

$$= \frac{\frac{\text{مجـ } س ص}{ن} - \bar{س}\bar{ص}}{\sqrt{\left[\frac{\text{مجـ } س^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجـ } س}{ن}\right)^2\right]\left[\frac{\text{مجـ } ص^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجـ } ص}{ن}\right)^2\right]}}$$

$$\therefore ر = \frac{(5)(125) - (15)(35)}{\sqrt{\left[5 \times 55 - (15)^2\right]\left[5 \times 285 - (35)^2\right]}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{50 \times 200}} = \frac{100}{\sqrt{10000}} = 1$$

∴ يوجد ارتباط طردى تام بين قيم المتغيرين س ، ص

ثانيا : طريقة الانحرافات :

باستخدام الانحرافات حول الوسط الفرضى

	س	ص	حس	حص	حس حص	$ح^2س$	$ح^2ص$
	1	3	2-	4-	8	4	16
	2	5	1-	2-	2	1	4
	3	7	0	0	0	0	0
	4	9	1	2	2	1	4
	5	11	2	4	8	4	16
المجموع	15	35	صفر	صفر	20	10	40

$$ر = \frac{\text{ن مجـ حس حص} - (\text{مجـ حس})(\text{مجـ حص})}{\sqrt{\left(\text{ن مجـ ح}^2_{\text{س}} - (\text{مجـ حس})^2\right)\left(\text{ن مجـ ح}^2_{\text{ص}} - (\text{مجـ حص})^2\right)}}$$

$$= \frac{5 \times 20 - \text{صفر} \times \text{صفر}}{\sqrt{(5 \times 10 - \text{صفر})(5 \times 40 - \text{صفر})}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{50 \times 200}} = \frac{100}{100} = 1$$ طردى تام

وهى نفس النتيجة السابقة التى حصلنا عليها مع ملاحظة تقليل العمليات الحسابية ، ولذلك يفضل استخدام هذه الطريقة لتسهيل العمل الحسابى وتقليل الوقت اللازم لحساب معامل الارتباط .

معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) :

يستخدم هذا المعامل لقياس العلاقة الارتباطية بين المتغيرات النوعية غير القابلة للقياس الكمى مثل العلاقة بين تقديرات الطلبة فى

المواد التى يقومون بدراستها . ويعتبر هذا المعامل من الطرق الإحصائية المهمة فى قياس العلاقة بين متغيرين رئيسيين وبصفة خاصة عندما يكون حجم العينة صغيراً ولا يزيد عن 30 مفردة وتعتمد هذه الطريقة على إعطاء المتغيرات رتب تحل محل القياس العددى وباستخدام الفروق بين رتب المتغيرين يمكن إيجاد العلاقة الارتباطية بينهما من خلال صيغة معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) .

وتمتاز هذه الطريقة عن طريقة بيرسون بالسهولة فى الحساب بالإضافة إلى إمكانية استخدامها فى حالة المتغيرات الكمية وتعتمد هذه الطريقة على الترتيب التنازلى أو التصاعدى لقيم الظاهرتين .

ويمكن تلخيص خطوات إيجاد معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) فى الآتى:

1- نضع فى العمودين الأول والثانى قيم الظاهرتين س، ص والتى غالباً ما تكون فى صورة تقديرات الطلبة فى الامتحانات أو قد تكون فى صورة قيم مطلقة .

2- نجئ فى الهامش ويتم ترتيب التقديرات الخاصة بالعمودين الأول والثانى تصاعدياً أو تنازلياً ونعطى كل تقدير رتبه .

3- ننقل من الهامش الرتب المعطاة لكل تقدير ونضعها فى العمود الثالث والرابع كل تقدير وفق رتبته مع مراعاة كتابة التقديرات فى العمود الأول والثانى بنفس ترتيبها فى المسألة المراد إيجاد معامل ارتباط الرتب لها .

4- نكون عمود خامس للفرق بين رتب العمود (3) ، العمود (4) .

5- نربع قيم العمود الخامس لنحصل على $ف^2$.

6- نوجد معامل ارتباط الرتب من العلاقة .

$$ر = 1 - \frac{6 \text{ مجـ ف}^2}{ن (ن^2 - 1)}$$

حيث ن عدد الرتب

ويلاحظ أنه كلما صغرت قيمة فـ^2 تدل أن العلاقة قوية وطرديه والعكس صحيح .

وعندما يكون الناتج

$$\frac{6 \text{ مجـ ف}^2}{ن (ن^2 - 1)} > 1$$

يدل ذلك على أن العلاقة عكسية بين المتغيرين .

مثال : فيما يلى تقديرات 6 من الطلبة فى امتحان مادتى الاقتصاد والرياضة والمطلوب حساب معامل الارتباط (سبيرمان) بين تقديرات المادتين.

الاقتصاد	ممتاز	جيد	ضعيف	مقبول	ضعيف جداً	جيد جداً
الرياضة	جيد	مقبول	ممتاز	ضعيف	جيد جداً	ضعيف جداً

الحل : نرتب تقديرات كل من المادتين ترتيب تصاعدى أو تنازلى وذلك بإعطاء التقدير ممتاز (رتبة 1) والتقدير جيد جداً (رتبة 2) والتقدير جيد (رتبة 3) والتقدير مقبول (رتبة 4) والتقدير ضعيف (رتبة 5) والتقدير ضعيف جداً (رتبة 6) . ثم نحسب الفروق بين رتب التقديرات أى الفرق بين كل رتبتين متناظرتين ثم نربع الفروق كما فى الجدول التالى :

الاقتصاد	الرياضة	رتب الاقتصاد	رتب الرياضة	ف	$ف^2$
ممتاز	جيد	1	3	2-	4
جيد	مقبول	3	4	1-	1
ضعيف	ممتاز	5	1	4+	16
مقبول	ضعيف	4	5	1-	1
ضعيف جداً	جيد جداً	6	2	4+	16
جيد جداً	ضعيف جداً	2	6	4-	16
المجموع				صفر	54

$$ر = 1 - \frac{6 \text{ مجـ } ف^2}{ن (ن^2 - 1)}$$

$$ر = 1 - \frac{6 \times 54}{6 (36 - 1)} = -0.54$$

وهذا يعنى أن هناك علاقة عكسية وسط بين تقديرات مادتى الاقتصاد والرياضة .

حساب معامل الارتباط(سبيرمان) فى حالة الرتب المكررة :

فى حالة الرتب المكرر نقوم بإعطاء المقيم المتكررة رتباً تساوى متوسط الرتب التى كانت لتعطى لو لم تتكرر التقديرات ، والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال : أوجد معامل الارتباط (سبيرمان) لتقديرات 10 من الطلاب فى مادتى الرياضة والإحصاء.

الرياضة	مقبول	جيد	ممتاز	جيد	مقبول	ضعيف	ضعيف جدا	مقبول	جيد	ممتاز
الإحصاء	جيد	ممتاز	جيد جدا	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	ضعيف جدا	ضعيف	جيد

الحل : نكون جدول الحل

رقم الطالب	الرياضة	الإحصاء	رتب الرياضة	رتب الإحصاء	ف	ف^2
1	مقبول	جيد	7	4	3	9
2	جيد	ممتاز	4	1	3	9
3	ممتاز	جيد جداً	1.5	2	0.5-	.25
4	جيد	مقبول	4	6.5	2.5-	6.25
5	مقبول	جيد	7	4	3	9
6	ضعيف	مقبول	9	6.5	2.5	6.25
7	ضعيف جداً	ضعيف	10	8.5	1.5	2.25
8	مقبول	ضعيف جداً	7	10	3-	9
9	جيد	ضعيف	4	8.5	4.5-	20.25
10	ممتاز	جيد	1.5	4	2.5-	6.25
المجموع					صفر	77.50

$$\text{ر} = 1 - \frac{6 \text{ مجـ ف}^2}{\text{ن (ن}^2 - 1)}$$

$$\text{ر} = 1 - \frac{6 \times 77.5}{10\ (100- \ 1)}$$

$$= \frac{465}{990}$$

$$= 1 - 0.47 = 0.53$$

∴ يوجد ارتباط طردى وسط بين مادتى الرياضة والإحصاء .

ملحوظة:

عند إعطاء رتب لتقديرات مادة الرياضة نجد أن الطالب رقم (3) الذى يستحق الرتبة (1) والطالب رقم (10) الذى يستحق الرتبة (2) حاصلان على تقدير ممتاز ولذلك يستحق كل منهم متوسط الرتبة وهو1 + 2 / 2 = 1.5 ، والطالب رقم (2) فى هذه المادة ورقم (4) ورقم (9) يستحقون الرتب الثالث والرابع والخامس ولهم نفس التقدير ونظراً لتساويهم فى التقدير فيعطى كل منهم متوسط هذه الرتب وهو 4 + 5 + 3 / 3 = 4 ، والطالب رقم (1) ، (5) ، (8) لهم نفس التقدير ويستحقون الرتب (6) ، (7) ، (8) ونظراً لتساويهم فى التقدير فيعطى كل منهم متوسط هذه الرتب وهو6 + 7 + 8 / 3 = 7 ، والطالب رقم (6) يستحق الرتبة (9) والطالب رقم (7) يستحق الرتبة (10) .

وبإتباع نفس الطريقة عند إعطاء رتب لتقدير مادة الإحصاء يمكن أن نحسب الفروق كما فى الجدول السابق .

حساب معامل الارتباط (سبيرمان) فى حالة البيانات الكمية :

كما ذكر سابقاً لا يقتصر استخدام معامل ارتباط سبيرمان على المتغيرات النوعية فقط بل يستخدم فى حالة المتغيرات الكمية أيضاً وذلك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : احسب معامل ارتباط سبيرمان بين قيمة المتغيرين (س ، ص) .

س	25	30	35	40	45	50
ص	13	16	18	20	31	42

الحل : نكون جدول الحل التالى :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^2$
25	13	1	1	صفر	صفر
30	16	2	2	صفر	صفر
35	18	3	3	صفر	صفر
40	20	4	4	صفر	صفر
45	31	5	5	صفر	صفر
50	42	6	6	صفر	صفر
المجموع				صفر	صفر

$$ر = 1 - \frac{6\ \text{مجـ}\ ف^2}{ن\ (ن^2 - 1)}$$

$$ر = 1 - \frac{6 \times \text{صفر}}{6\ (36 \times 1)}$$

أى أن الارتباط طردى تام بين قيم المتغيرين س ، ص .

اختبار معنوية معامل الارتباط :

يستعمل اختبار (ت) للكشف عن معنوية معامل الارتباط (ر) وذلك وفقاً للصيغة التالية :

$$ت_{ر} = \frac{ر\sqrt{ن - 2}}{\sqrt{1 - ر^2}}$$

حيث ن : عدد المفردات ، $ر^2$ = مربع معامل الارتباط

مثال : فى دراسة العلاقة بين عمر نبات الفول بالأسبوع وطول النبات بالسنتيمتر حصل الباحث على النتائج التالية :

العمر (س)	1	2	3	4	5	6	7
الطول (ص)	5	13	16	23	33	38	40

والمطلوب حساب معامل الارتباط واختبار معنويته

الحل : معامل الارتباط (ر)

$$= \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\sqrt{\left[\dfrac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2\right]\left[\dfrac{\text{مجـ ص}^2}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^2\right]}}$$

	س	ص	س ص	س^2	ص^2
	1	5	5	1	25
	2	13	26	4	169
	3	16	48	9	256
	4	23	92	16	589
	5	33	165	25	1089
	6	38	228	36	1444
	7	40	280	49	1600
المجموع	28	168	844	140	5112

$$\text{ر} = \frac{\dfrac{844}{7} - (4)\,(24)}{\sqrt{\dfrac{140}{7} - (4)^2}\;\sqrt{\dfrac{5112}{7} - (24)^2}} = 0.989$$

ويعنى ذلك أنه يوجد ارتباط طردى قوى بين عمر النبات وطوله .

إختبار معنوية معامل الارتباط :

$$ت_ر = \frac{0.989\sqrt{7-2}}{\sqrt{1-(0.989)^2}} = 226.02$$

وبمقارنة هذه القيمة بنظيرتها الجدوليه ($ت_{0.05}$) = 2.571 تبين معنوية العلاقة بين عمر النبات وطوله .

تمارين

(1) أوجد معامل الارتباط بيرسون من بيانات الجدول التالى :

س	13	18	14	18	23	21	14	25	23	14
ص	10	16	12	18	17	17	9	19	17	11

ملحوظة : (مجـ س = 146 ، مجـ ص = 183 ، مج س ص = 804 ،

مجـ س^2 = 2254 ، مجـ ص^2 = 3529) .

(2) إذا علمت أن

مجـ س = 768 ، مجـ س ص = 63885 ، مجـ ص^2 = 68153 ، مجـ س^2 = 60064 ، مجـ ص = 821 ، ن = 10 .

أوجد معامل ارتباط بيرسون .

(3) إذا علمت أن

$\bar{\text{س}}$ = 43.5 ، مجـ س ص = 14438 ، مجـ س^2 = 24045

$\bar{\text{ص}}$ = 27.2 ، مجـ ص^2 = 68153 ، ن = 10 .

أوجد معامل ارتباط بيرسون .

(4) فيما يلى التقديرات التى حصل عليها 6 طلاب فى مادتى الإحصاء والرياضة والمطلوب حساب معامل الارتباط بين تقديرات هاتين المادتين .

الإحصاء	ممتاز	جيد	ضعيف	مقبول	جيد جداً	ضعيف جداً
الرياضة	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جداً	ضعيف جداً	ممتاز

(5) فيما يلى التقديرات التى حصل عليها 8 طلاب فى مادتى الإحصاء والاقتصاد والمطلوب حساب معامل الارتباط بين تقديرات هاتين المادتين .

الإحصاء	ضعيف جداً	مقبول	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز	مقبول	ضعيف
الاقتصاد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف جداً	ضعيف

(6) استخدم معامل ارتباط سبيرمان لحساب العلاقة الارتباطيه بين قيم المتغيرين س ، ص .

س	11	21	31	41	51
ص	20	40	60	80	100

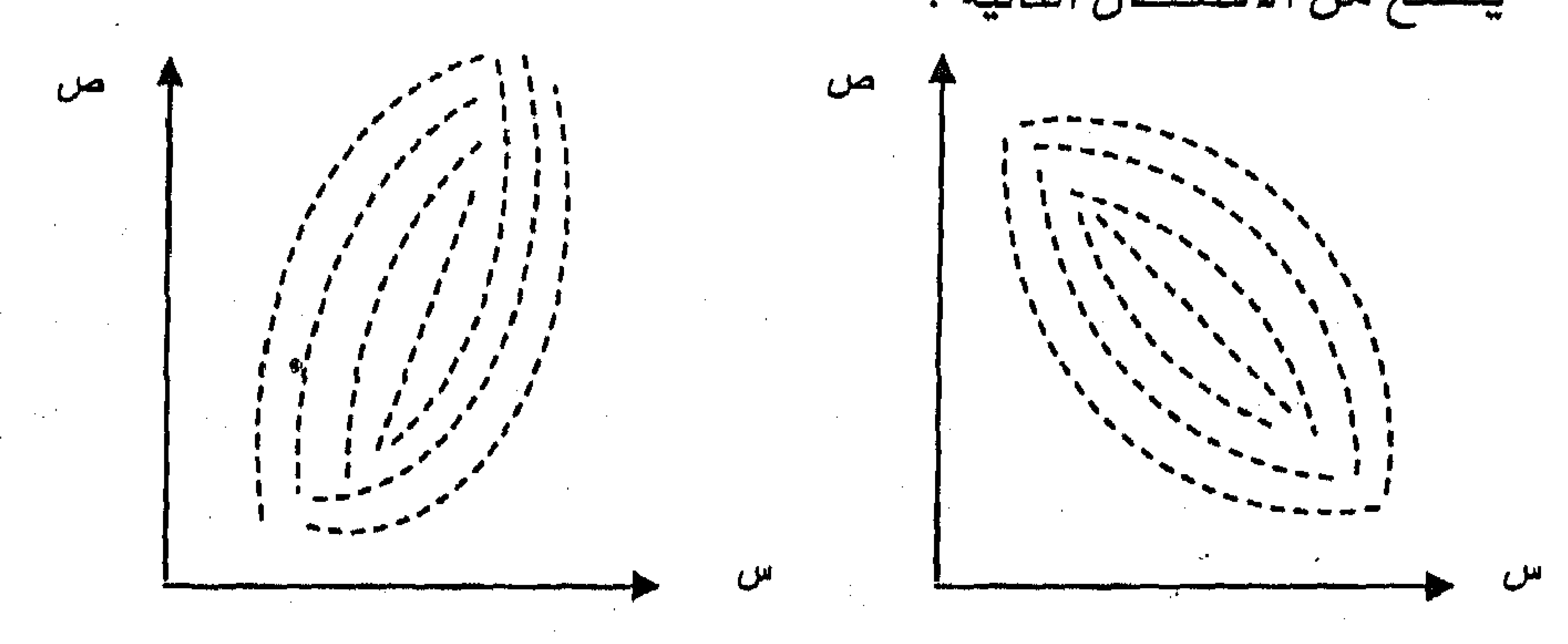
الفصل السادس

الانحدار *Regression*

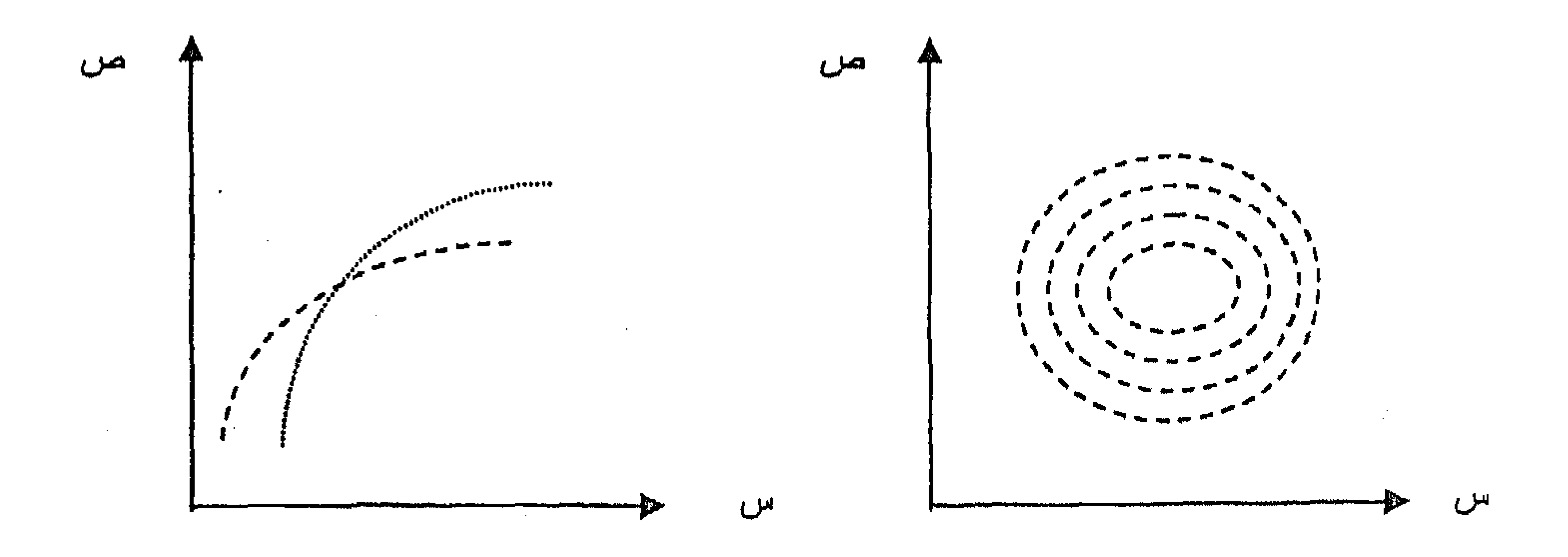
تمهيد :

يختص الانحدار بدراسة العلاقة بين متغيرين أو أكثر أحدهما متغير تابع Dependent Variable والآخر متغير مستقل Independent Variable (أو متغيرات مستقلة) فإذا كانت العلاقة بين متغيرين فقط أحدهما تابع والآخر مستقل سمى بالانحدار البسيط Simple Regression ، بينما إذا كانت العلاقة بين متغير تابع وأكثر من متغير مستقل سمى بالانحدار المتعدد Multi Regression ويمكن استخدام الانحدار فى عملية التنبؤ Prediction الإحصائى بالمستقبل .

ويمكن من خلال شكل الانتشار Scatter Diagram بين قيم المتغير التابع وقيم المتغير المستقل تكوين فكرة مبدئية عن نوع العلاقة إذا كانت طردية أم عكسية أم لا توجد علاقة بين المتغيرين وذلك كما يتضح من الأشكال التالية :



علاقة عكسية بين قيم س ، ص　　　　علاقة طردية بين قيم س ، ص



لا تجود علاقة بين قيم س ، ص   علاقة غير خطية بين قيم س ، ص

طريقة المربعات الصغرى لتوفيق الخط المستقيم :

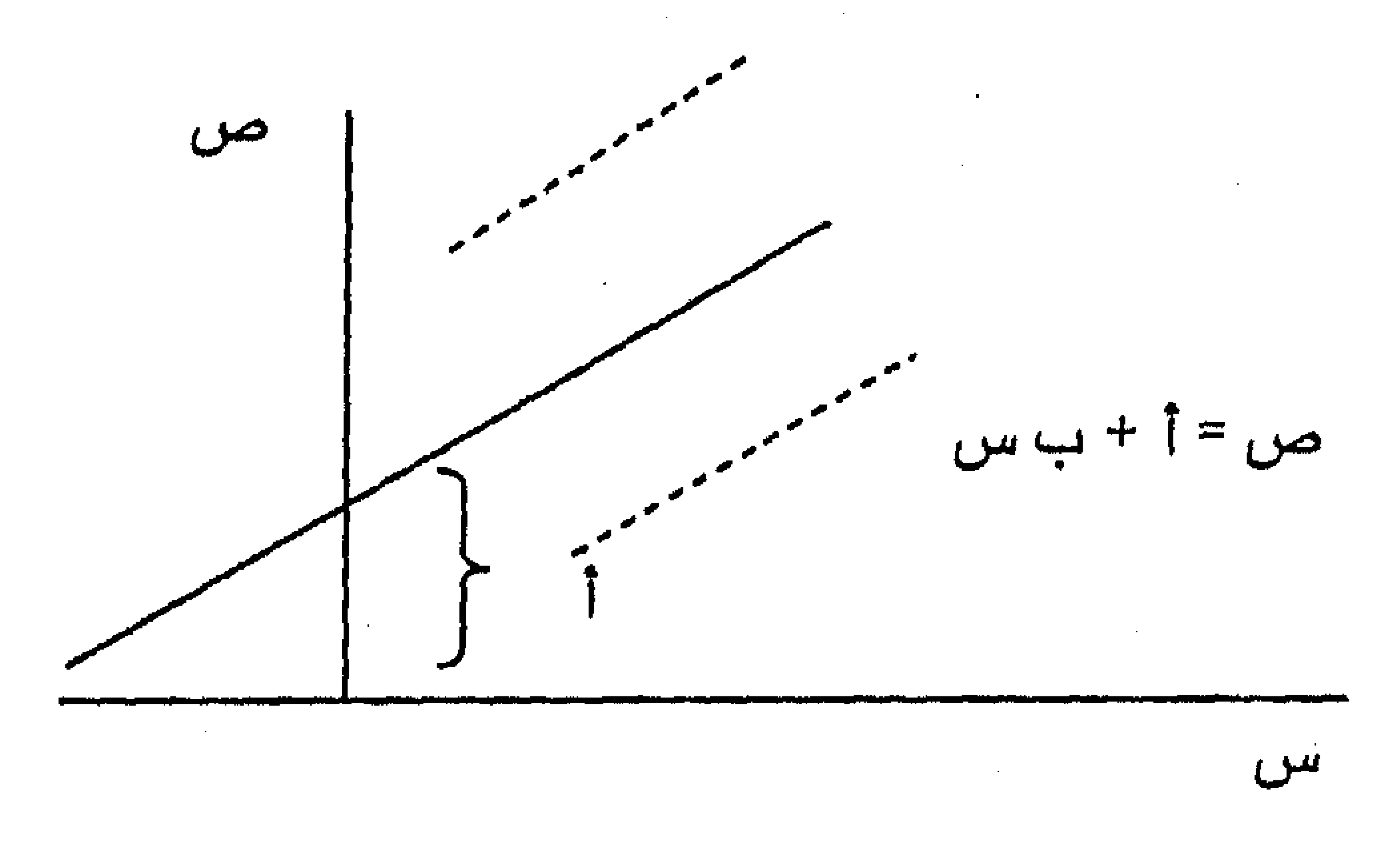
تعتبر طريقة المربعات الصغرى الطريقة الشائعة لتوفيق الخط المستقيم ، وتبنى هذه الطريقة على أساس توفيق خط لمجموعة من القيم بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات قيم ص عن الخط المستقيم المحسوب أقل ما يمكن ، أى مجموع الفروق بين القيم المشاهدة والقيم المتوقعة يساوى صفر ، وفى نفس الوقت يمكن التعبير عن الخط بمعادلة يحسب منها وهذا الخط يطلق عليه خط الانحدار. وخط الانحدار المطلوب توفيقه سوف لا يمر بجميع النقط فى شكل الانتشار ولكن بعض هذه النقط سوف يقع فوقه والبعض الآخر سوف يقع تحته وبالتالى إذا اخترنا أى قيمة للمتغيرين (س) وقدرنا قيمة (ص) المناظرة لها من واقع معادلة هذا الخط (معادلة الانحدار) فإن قيمة (س) سوف تختلف عن قيمة(ص) الفعلية فى حالة عدم انطباق النقطة على الخط تماماً ، وهذا الاختلاف يعطى لنا انحراف النقطة (البعد الرأسى لها) عن خط الانحدار .

معادلة إنحدار ص على س

ولإيجاد معادلة الانحدار التى على الصورة

ص = أ + ب س

حيث أ هو الجزء المقطوع من المحور الرأسى ، (ب) هى ميل خط الانحدار أو معامل الانحدار ص على س ويعرف بأنه التغير فى قيمة (ص) نتيجة التغير فى (س) بوحدة واحدة .



ويمكن الحصول على قيمتى أ ، ب من المعادلتين التاليتين :

$$\hat{ب} = \frac{\frac{مجـ\ س\ ص - \bar{س}\ \bar{ص}}{ن}}{\frac{مجـ\ س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ\ س}{ن}\right)^2} = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س)\ (مجـ\ ص)}{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2}$$

$$\hat{أ} = \bar{ص} - ب\ \bar{س}$$

حيث $\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$ ، $\bar{ص} = \frac{مجـ\ ص}{ن}$

ن = عدد مفردات س أو ص

وتكون الصيغة الرياضية لمعادلة انحدار ص على س على الصورة التالية :

$$\hat{ص}_{هـ} = \hat{أ} + \hat{ب}\ س_{هـ} \qquad (1)$$

حيث $\hat{ص}_{هـ}$: هى قيم ص المقدرة فى المشاهدة هـ

$س_{هـ}$: هى قيم س فى المشاهدة هـ

هـ : هى مشاهدات (س ، ص) الزوجية

$\hat{ب}$: معامل الانحدار وهو يشير إلى مقدار التغير فى قيمة (ص) عندما تتغير (س) بوحدة واحدة، كما إنه يشير إلى ميل الخط المستقيم .

$\hat{أ}$: المعلمة الثابتة ويشير إلى الجزء المقطوع من محور (ص) ويوضح أثر المتغيرات الأخرى خلاف (س) المؤثرة على (ص) والتى لم تؤخذ فى الاعتبار عند تقدير العلاقة الرياضية بين (س ، ص) .

ويمكن استخدام معادلة الانحدار فى التنبؤ بقيمة (ص) عندما تأخذ (س) قيمة معينة، فإذا فرض أن دالة إنتاج محصول ما ممثلة بالعلاقة التالية :

$$\hat{ص}_{هـ} = 2 + 3\,\hat{س}_{هـ}$$

حيث تعبر $\hat{ص}_{هـ}$ عن حجم الإنتاج المقدر بالطن وأن (س) هى المورد الإنتاجى الممثل فى الأسمدة . فإذا كانت كمية الأسمدة هى 60 وحدة فإنه يمكن تقدير حجم الإنتاج من المحصول استناداً إلى معادلة الانحدار أو دالة الإنتاج السابقة .

$$\hat{ص}_{هـ} = 2 + 3 \times 60 = 182 \text{ وحدة}$$

وعلى ذلك يمكن تقدير حجم الإنتاج كلما اختلفت كمية السماد بنفس طريقة التقدير السابقة وذلك بالتعويض عن قيمة (س) فى معادلة الانحدار بما يقابلها من كمية السماد المعطاة .

خطوات حساب معامل الانحدار ب :

1- بالإضافة إلى عمودى أزواج المشاهدات س ، ص نكون عمودين آخرين هما عمود س ص ، عمود $س^2$.

2- نحصل على مجموع الأربعة أعمدة .

3- نطبق القانون للحصول على قيمة ب .

معادلة انحدار س على ص :

هذه المعادلة تأخذ الصورة الرياضية التالية :

$$\hat{س}_{هـ} = جـ + ء\, ص_{هـ} \quad (2)$$

ويمكن الحصول على ء ، جـ كما يلى

$$ء = \frac{\frac{مجـ\, س\, ص}{ن} - \bar{س}\,\bar{ص}}{\frac{مجـ\, ص^2}{ن} - \left(\frac{مجـ\, ص}{ن}\right)^2}$$

$$جـ = \bar{س} - ء\,\bar{ص}$$

ويلاحظ إننا يمكن اشتقاق معادلة انحدار س على ص واشتقاق معامل الانحدار الخاص بها وكذلك الجزء الثابت جـ من خلال تبديل (س) بـ (ص) أو (ص) بـ (س) فى المعادلة (1) لنحصل على المعادلة (2) .

مثال : أوجد معامل انحدار ص على س من بيانات الجدول التالى :

س	1	3	9	8	4
ص	2	6	8	5	4

الحل : نكون أعمدة الحل

	س	ص	س ص	$س^2$
	1	2	2	1
	3	6	18	9
	9	8	72	81
	8	5	40	64
	4	4	16	16
المجموع	25	25	148	171

$$\bar{س} = \frac{مجـ\,س}{ن} = \frac{25}{5} = 5 \quad ، \quad \bar{ص} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\hat{ب} = \frac{\frac{مجـ\,س\,ص}{ن} - \bar{س}\,\bar{ص}}{\frac{مجـ\,س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ\,س}{ن}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{148}{5} - 5 \times 5}{\frac{171}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2} = \frac{4.6}{9.2} = 0.5$$

$$\hat{أ} = \bar{ص} - ب\,\bar{س}$$

$$= 5 - 0.5 \times 5 = 2.5$$

∴ معادلة الانحدار هى

$$\hat{\text{ص}}_{\text{هـ}} = 2.5 + 0.5\ \hat{\text{س}}_{\text{هـ}}$$

ويمكن التنبؤ بقيمة (ص) عندما (س) يساوى 100 مثلاً وذلك من خلال التعويض فى معادلة الانحدار عن قيمة س = 100 لنحصل على ص :

$$\hat{\text{ص}}_{\text{هـ}} = 2.5 + 0.5 \times 100 = 52.5$$

وأن 0.5 تعنى أنه إذا تغيرت (س) بمقدار وحدة واحدة فإن (ص) تتغير بمقدار 0.5 وحدة .

مثال : أوجد معادلة انحدار س على ص من البيانات الآتية :

س	1	2	3	4	5
ص	5	4	3	2	1

الحل : نكون أعمدة الحل

	س	ص	س ص	ص^2
	1	5	5	25
	2	4	8	16
	3	3	9	9
	4	2	8	4
	5	1	5	1
المجموع	15	15	35	55

$$\text{ء} = \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\dfrac{\text{مجـ ص}^2}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{35}{5} - 3 \times 3}{\frac{55}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2} = \frac{7 - 9}{11 - 9} = -1$$

جـ = $\bar{س}$ − ء $\bar{ص}$

$= 3 - (-1) \times 3 = 6$

∴ معادلة الانحدار س على ص هى

$\hat{س}_{هـ} = 6 - \hat{ص}_{هـ}$

مثال : أوجد معادلة خط انحدار (ص على س) من بيانات الجدول التالى :

س	3	2	1	3	1
ص	9	8	5	10	8

الحل : نكون أعمدة الحل

	س	ص	س ص	$س^2$
	3	9	27	9
	2	8	16	4
	1	5	5	1
	3	10	30	9
	1	8	8	1
المجموع	10	40	86	24

$\bar{س} = \frac{10}{5} = 2$ ، $\bar{ص} = \frac{40}{5} = 8$

$$\hat{ب} = \frac{\frac{86}{5} - 2 \times 8}{\frac{24}{5} - \left(\frac{10}{5}\right)^2} = 1.5 \text{ تقريباً}$$

$\hat{أ} = \bar{ص} - ب\bar{س}$

$= 8 - 1.5 \times 2 = 5$

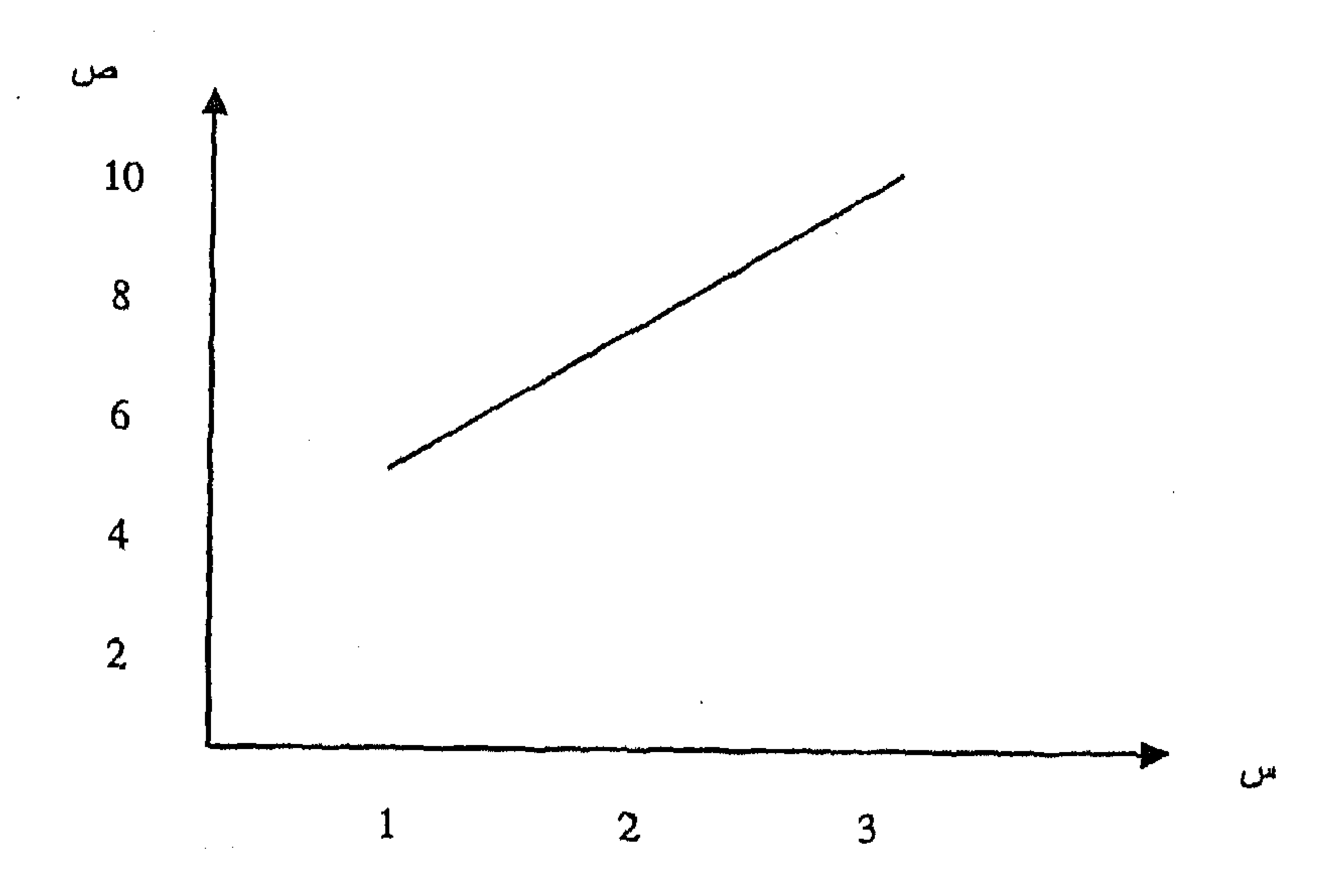
∴ معادلة الانحدار هى

$\hat{ص}_ـه = 5 + 1.5 \hat{س}_ـه$

ويمكن تقدير ص^ التقديرية المقابلة لقيم س الأصلية عند كل قيمة من قيم (س) كما يلى:

قيم س	قيم ص الأصلية	قيم ص التقديرية
3	9	9.5
2	8	8
1	5	6.5
3	10	9.5
1	8	6.5

ويمكن الحصول بيانياً على الخط المستقيم الممثل لبيانات (س ، ص) وذلك بتوقيع أزواج قيم (س ، ص) بيانياً على الرسم كما يلى:



العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل الانحدار :

يمكن إيجاد العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط من خلال العلاقات الرياضية التالية :

(1) حاصل ضرب معامل انحدار ص على س فى معامل انحدار س على ص يساوى مربع معامل الارتباط .

فإذا فرضنا أن معامل انحدار ص على س هو (ب) ومعامل انحدار س على ص هو ($\bar{ب}$) ومعامل الارتباط هو (ر) فإن

$$ر^{2} = ب \times \bar{ب}$$

$$\therefore ر = \sqrt{ب \times \bar{ب}}$$

(2) حاصل ضرب (ب) معامل انحدار فى $ع_{س}$ / $ع_{ص}$ يساوى معامل الارتباط حيث ($ع_{س}$) الانحراف المعيارى لقيم (س) ، ($ع_{ص}$) الانحراف المعيارى لقيم (ص)

$$ر = ب \times \frac{ع_س}{ع_ص} \quad \text{ومنها}$$

$$ب = ر \times \frac{ع_ص}{ع_س}$$

مثال : إذا علمت أن معادلة انحدار (ص) على (س) هى

$$ص = 3 + 0.75 \text{ س}$$

ومعادلة انحدار (س) على (ص) هى

$$س = 4 + 0.06 \text{ ص}$$

فأوجد معامل الارتباط

الحل : $ب = 0.75$ ، $\bar{ب} = 0.06$

$$ر = \sqrt{ب \times \bar{ب}}$$

$$= \sqrt{0.75 \times 0.06} = 0.21$$

وهى نتيجة صحيحة لأنها ضمن الفترة التى تقع فيها قيمة معامل الارتباط حيث

$$-1 \leq ر \leq 1$$

مثال : إذا علمت أن معادلة انحدار (ص) على (س) هى :

$$ص = 0.94 \text{ س} + 6.2$$

ومعادلة انحدار (س) على (ص) هى

$$س = 1.5 \text{ ص} - 3.2$$

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين .

الحل : $ب = 0.94$ $\bar{ب} = 1.5$

$ر = \sqrt{ب \times \bar{ب}}$

$= \sqrt{0.94 \times 1.5} = \sqrt{1.41} = 1.19$ تقريباً

∴ يوجد خطأ فى إحدى المعادلتين لأن قيمة معامل الارتباط أكبر من الواحد الصحيح وهى لا يمكن أن تزيد عن الواحد الصحيح .

مثال : إذا علمت أن الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للمتغير (س) هما 1 ، 0.45 على الترتيب، وأن الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للمتغير (ص) هما 5 , 1.43 على الترتيب فأوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س) علماً بأن معامل الارتباط بين قيم (س) ، (ص) هو 0.67 ثم تنبأ بقيمة (ص) عندما (س) = 10 .

<u>الحل:</u>

$$ب = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$$

$$= 0.67 \times \frac{1.43}{0.45} = 2.13$$

∴ $أ = \bar{ص} - ب\,\bar{س}$

$$= 5 - 2.13 \times 1 = 2.87$$

∴ معادلة خط انحدار (ص) على (س) هى

$$\hat{ص}_{هـ} = 2.87 + 2.13\,س_{هـ}$$

قيمة ($\hat{ص}_{هـ}$) عندما $س_{هـ}$ = 10 هى

$$\hat{ص}_{هـ} = 2.87 + 2.13 \times 10$$

$$= 2.87 + 21.30 = 24.17$$

طريقة العزوم لحساب معادلة خط الانحدار :

طريقة المربعات الصغرى السابقة لتقدير معادلة الانحدار تعطى نفس نتائج طريقة العزوم ، ولكن لطريقة العزوم أهمية خاصة عند الحديث عن الانحدار المتعدد ، وهذه الطريقة تساعد على معرفة المعنوية الإحصائية للعلاقة القياسية المقدرة وغير ذلك من المعايير الإحصائية الآخرى .

خطوات حساب معادلة الانحدار بطريقة العزوم :

1- نحصل على عزوم س على ص = $\frac{\text{مجـ س ص}}{ن} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{ن^2}$

أو = مجـ س ص - $\frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{ن}$

2- نحصل على عزوم س على س = $\frac{\text{مجـ س}^2}{ن} - \frac{(\text{مجـ س})^2}{ن^2}$

أو = مجـ س^2 - $\frac{(\text{مجـ س})^2}{ن}$

3- نحصل على عزوم ص على ص $= \frac{\text{مجـ ص}^2}{\text{ن}} - \frac{(\text{مجـ ص})^2}{\text{ن}^2}$

أو $= \text{مجـ ص}^2 - \frac{(\text{مجـ ص})^2}{\text{ن}}$

4- قيمة معامل الانحدار ب^ $= \frac{\text{عزوم س على ص}}{\text{عزوم س على ص}} = \frac{\text{ع}_{\text{س ص}}}{\text{ع}_{\text{س س}}}$

5- قيمة أ^ $= \bar{\text{ص}} - \text{ب}\,\bar{\text{س}}$

اختبار معنوية معامل الإنحدار :

ولمعرفة المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار (ب) يلزمنا الحصول على قيمة (ت) المحسوبة ويكون ذلك من خلال الخطوات التالية :

1- نحصل على تباين البواقى $= \text{ع}_{\text{ص ص}} - \text{ب} \times \text{ع}_{\text{س ص}}$

حيث $\text{ع}_{\text{ص ص}}$ عزوم ص على ص ، $\text{ع}_{\text{س ص}}$ عزوم س على ص .

2- تباين الخطأ = تباين البواقى × ن / (ن – 2)

حيث ن هى عدد المشاهدات

3- تباين (ب) $= \frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{ن} \times \text{ع}_{\text{س س}}}$

4- الخطأ القياس لمعدل التغير الحدى (ب) $= \sqrt{\text{تباين (ب)}}$

5- قيمة (ت) المحسوبة = $\frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسى لمعدل التغير الحدى}}$

6- نقارن (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية التى يتم استخراجها من جدول (ت) الإحصائى عند درجة حرية (ن - 2) أو درجة حرية الخطأ ، فإذا كانت (ت) المحسوبة أكبر من أو يساوى قيمة (ت) الجدولية فإن ذلك يدل على أن معدل التغير الحدى أو معامل الانحدار (ب) معنوى .

مثال : قدر العلاقة القياسية بين قيم المتغير (ص) وقيم المتغير (س) بطريقة العزوم ثم اكشف عن المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار .

إذا علمت أن :

س	3	2	1	3	1
ص	9	8	5	10	8

الحل : نكون جدول الحل التالى وهو نفس الجدول السابق مع إضافة عمود جديد هو عمود $ص^2$.

	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
	3	9	27	9	81
	2	8	16	4	64
	1	5	5	1	25
	3	10	30	9	100
	1	8	18	1	64
المجموع	10	40	86	24	334

$$\text{ع}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \frac{(\text{مجـ س})\,(\text{مجـ ص})}{\text{ن}^2}$$

$$= \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - (\bar{\text{س}})\,(\bar{\text{ص}})$$

$$= \frac{86}{5} - \frac{40 \times 10}{(5)^2} = 17.2 - 16 = 1.2$$

$$\text{ع}_{\text{س س}} = \frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}^2}$$

$$= \frac{24}{5} - \frac{10 \times 10}{(5)^2} = 4.8 - 4 = 0.8$$

$$\text{ع}_{\text{ص ص}} = \frac{\text{مجـ ص}^2}{\text{ن}} - \frac{(\text{مجـ ص})^2}{\text{ن}^2}$$

$$= \frac{334}{5} - \frac{40 \times 40}{(5)^2} = 66.8 - 64 = 2.8$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ع}_{\text{س ص}}}{\text{ع}_{\text{س س}}} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$$

أ = $\bar{ص}$ - ب $\bar{س}$

$= 8 - 1.5 \times 2 = 5$

∴ معادلة الانحدار هى

$\hat{ص}_{هـ} = 5 + 1.5$ س$_{هـ}$

ولمعرفة المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار (ب) نسترشد بخطوات الحل السابق ذكرها لتحديد المعنوية الإحصائية .

تباين البواقى = ع$_{ص ص}$ − ب × ع$_{س ص}$

$= 2.8 - 1.5 \times 1.2 = 1$

تباين الخطأ = تباين البواقى × $\frac{ن}{ن - 2}$

$= 1 \times \frac{5}{3} = 1.67$ تقريباً

$$\text{تباين (ب)} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{ن} \times \text{ع}_{\text{س}\text{س}}} = \frac{1.67}{5 \times 0.8} = 0.42 \text{ تقريباً}$$

$$\text{الخطأ القياسى} = \sqrt{\text{تباين (ب)}}$$

$$= \sqrt{0.42} = 0.65 \text{ تقريباً}$$

$$\text{(ت) المحسوبة} = \frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسي}}$$

$$= \frac{1.5}{0.65} = 2.31 \text{ تقريباً}$$

وبالكشف فى جدول (ت) الإحصائى عن قيمة (ت) الجدولية بدرجة حرية (ن – 2) عند مستوى المعنوية 01. يتضح إنها تساوى 5.84 أى أن (ت) المحسوبة أقل من (ت) الجدولية وهذا يعنى أن قيمة (ب) غير معنوية إحصائياً .

الصورة القياسية لمعادلة الانحدار المقدرة هى :

$$\hat{\text{ص}}_{\text{هـ}} = 5 + 1.5 \text{ س}_{\text{هـ}}$$

$$(2.31)$$

حيث الرقم بين القوسين يشير إلى قيمة (ت) المحسوبة .

مثال : أوجد معادلة خط انحدار ص على س بطريقة العزوم ثم اختبر المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار من واقع بيانات الجدول التالى:

س	3	5	2	5	7
ص	4	7	5	10	15

الحل : نكون جدول الحل التالى :

	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
	3	4	12	9	16
	5	7	35	25	49
	2	5	10	4	25
	5	10	50	25	100
	7	15	105	35	225
المجموع	22	41	212	112	415

$$ع_{س ص} = \text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{ن}$$

$$= 212 - \frac{41 \times 22}{5} = 31.6$$

$$ع_{س س} = \text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{ن}$$

$$= 112 - \frac{22 \times 22}{5} = 15.2$$

$$ع_{ص ص} = \text{مجـ ص}^2 - \frac{(\text{مجـ ص})^2}{ن}$$

$$= 145 - \frac{41 \times 41}{5} = 78.8$$

$$ب = \frac{ع_{س ص}}{ع_{س س}} = \frac{31.6}{15.2} = 2.07$$

$$أ = \bar{ص} - ب\,\bar{س}$$

$$= \frac{\text{مجـ ص}}{ن} - ب \times \frac{\text{مجـ س}}{ن}$$

$$= \frac{41}{5} - 2.07 \times \frac{22}{5} = - 0.908$$

∴ معادلة الانحدار (ص) على (س) هى :

$$\hat{ص}_{هـ} = - 0.907 + 2.07\ س_{هـ}$$

وللكشف عن معنوية معامل الانحدار (ب) فيجب الحصول على قيمة (ت) المحسوبة باتباع الخطوات السابق ذكرها كما يلى ؛

تباين البواقى = $ع_{ص ص} - ب \times ع_{س ص}$

$$= 78.8 - 2.07 \times 31.6$$

$$= 13.39$$

$$\text{تباين الخطأ} = \text{تباين البواقى} \times \frac{\text{ن}}{\text{ن} - 2}$$

$$= 13.39 \times \frac{5}{5 - 2} = 22.3$$

$$\text{تباين معامل الانحدار(ب)} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{ن} \times \text{ع}_{\text{س س}}} = \frac{22.3}{5 \times 15.2} = 0.29$$

$$\text{الخطأ القياسى} = \sqrt{\text{تباين (ب)}}$$

$$= \sqrt{0.29} = 0.54$$

$$\text{(ت) المحسوبة} = \frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسى}}$$

$$= \frac{2.07}{0.54} = 3.8$$

وبمقارنة (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية عند مستوى المعنوية (0.01) ودرجة حرية (ن = 2) نجد أنها تساوى 5.84 أى أن قيمة (ت) المحسوبة أقل من قيمة (ت) الجدولية .

∴ معامل الانحدار غير معنوى .

وتكون الصيغة القياسية لمعادلة الانحدار هى :

$$\hat{\text{ص}}_{\text{هـ}} = - 0.907 + 2.07 \text{ س}_{\text{هـ}}$$

(3.8)

خطأ التقدير :

يتبين من الأمثلة السابقة أن خط الانحدار قد لا يمر بجميع نقط الظاهرة موضوع الدراسة، ولذلك تكون هناك بعض النقط لـ (س ، ص) مشتتة حول خط الانحدار ويقاس ذلك التشتت بالجذر التربيعى لمتوسط مربعات أبعاد النقط الرأسية عن الخط (فى حالة انحدار ص على س) ويسمى ذلك المقياس بخطأ التقدير ويرمز له بالرمز $ع_{ص/س}$ فى حالة انحدار ص على س وبالرمز $ع_{س/ص}$ فى حالة انحدار س على ص .

ويكون خطأ التقدير مساوياً للصفر عندما تقع جميع نقط (س ، ص) على خط الانحدار أى أنه يمكن اعتباره كمقياس لكمية الأخطاء التى تم الوقوع فيها .

ويأخذ هذا المقياس الصورة الرياضية التالية :

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{1}{ن - 2} \times مجـ (المشاهد - المقدر)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{مجـ (ص - \hat{ص})^2}{ن - 2}}$$

أو باستخدام العلاقة

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{مجـ ص^2 - ب\ مجـ س\ ص - أ\ مجـ ص}{ن - 2}}$$

وبالمثل فإن $ع_{س/ص} = \sqrt{\dfrac{\text{مجـ س}^2 - \text{ب مجـ س ص} - \text{أ مجـ س}}{\text{ن} - 2}}$

وهى تمثل مقياس خطأ التقدير فى حالة انحدار س على ص .

مثال : أوجد معادلة انحدار ص على س ثم احسب خطأ التقدير للبيانات التالية :

س	2	3	5	6	9
ص	1	5	2	3	4

الحل :

	س	ص	س ص	$س^2$	ص^	ص - ص^	$(\text{ص} - \text{ص}^\wedge)^2$
	2	1	2	4	2.97	1.97-	3.88
	3	5	15	9	2.98	2.02	4.08
	5	2	10	25	3.00	1-	1
	6	3	18	36	3.004	.004-	.00002
	9	4	36	81	3.032	.978	.96
المجموع	**25**	**15**	**81**	**155**			**9.92**

$$\text{ب} = \frac{\dfrac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\text{مجـ س}^2 - \left(\dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2}$$

$$ب = \frac{\frac{81}{5} - 5 \times 3}{155 - \left(\frac{25}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{1.2}{130} = 0.009$$

$$أ = \bar{ص} - ب \bar{س}$$

$$= 3 - 0.009 \times 5 = 2.95$$

∴ معادلة انحدار ص على س هى :

$$\hat{ص}_{هـ} = 2.95 + 0.009 \, س_{هـ}$$

وبالتعويض عن قيم س المختلفة فى معادلة الانحدار المتحصل عليها نحصل على قيم ص^ كالتالى :

$$\hat{ص}_{س=2} = 2.95 + 0.009 \times 2 = 2.97$$

$$\hat{ص}_{س=3} = 2.95 + 0.009 \times 3 = 2.98$$

$$\hat{ص}_{س=5} = 2.95 + 0.009 \times 5 = 3.00$$

$$\hat{ص}_{س=6} = 2.95 + 0.009 \times 6 = 3.004$$

$$\hat{ص}_{س=9} = 2.95 + 0.009 \times 9 = 3.032$$

$$خطأ التقدير = \sqrt{\frac{مجـ (ص - \hat{ص})^2}{ن - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9.92}{3}} = 1.8$$

وهذا يعنى أنه لتقدير قيمة (ص) بمعلومية قيمة (س) فإن الخطأ المعيارى لهذا التقدير هو 1.8 .

مثال : إذا توفرت لديك البيانات التالية عن المتغيرين (س ، ص)

$\bar{س}$ = 53 ، $\bar{ص}$ = 45 ، مجـ $س^2$ = 29982 ،

مجـ $ص^2$ = 21144 ، مجـ س ص = 24924 ، ن = 10

أوجد :

أ – معادلة انحدار ص على س

ب- خطأ التقدير لخط انحدار ص على س

الحل :

∵ $\bar{س}$ = 53 ، ن = 10 ، $\bar{ص}$ = 45

∴ مجـ س = 530 ، مجـ ص = 450

$$ب = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$= \frac{10 \times 24924 - 530 \times 450}{10 \times 29982 - (530)^2} = 0.57$$

$$أ = \bar{ص} - ب\,\bar{س}$$

$$= 45 - 0.57 \times 53 = 14.9$$

∴ معادلة الانحدار هى :

$$\hat{ص}_{هـ} = 14.9 + 0.57\, س_{هـ}$$

$$\text{خطأ التقدير} = \sqrt{\frac{مجـ\, ص^2 - أ\, مجـ\, ص - ب\, مجـ\, س\, ص}{ن - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{21144 - 14.9 \times 450 - 0.57 \times 24984}{10 - 2}}$$

$$= 5.94$$

وهذا يعنى أنه لتقدير قيمة (ص) بمعلومية قيمة (س) فإن الخطأ المعيارى لهذا التقدير هو 5.94 .

ملحوظة : يلاحظ أن معادلة الخطأ المعيارى قريبة من معادلة الانحراف المعيارى العادية حيث أن كلاً منهما يعتبر مقياساً للتشتت ، ولكن الاختلاف الوحيد بينهما أن الانحراف المعيارى يقيس التشتت حول نقطة معينة هى الوسط الحسابى ، بينما الخطأ المعيارى يقيس التشتت حول خط الانحدار .

معادلة الاتجاه العام الزمنى General Trend Function

تعتبر معادلة الاتجاه العام الزمنى من الدرجة الأولى صورة من معادلة خط الانحدار البسيط بينما إذا كانت معادلة الاتجاه العام الزمنى من الدرجة الثانية أو الثالثة فهى صورة من صور الانحدار المتعدد .

والصورة الرياضية لمعادلة الاتجاه العام الزمنى هى :

$$\hat{\text{ص}}_{\text{هـ}} = \text{أ} \pm \text{ب}\ \text{س}_{\text{هـ}}$$

حيث :

ص : القيمة المقدرة للمتغير التابع المراد معرفة الاتجاه العام له .

س : متغير أو عامل الزمن ، هـ : عدد السنوات

ونستخرج قيمة أ ، ب بنفس الطريقة السابقة فى معادلة الانحدار البسيط مع ملاحظة أن متغير الزمن (س) يجب أن يبدأ من الرقم (1) إلى نهاية الفترة الزمنية الأمر الذى يعنى ضرورة تحويل الفترة الزمنية إلى أرقام خام تبدأ من (1) حتى نهاية الفترة .

فمثلاً إذا كان المتغير س يمثل الفترة من سنة 1995 إلى سنة 2000 فإن البيانات الخام لهذا المتغير تأخذ الأرقام كالآتى :

السنة	البيانات
1995	1
1996	2
1997	3
1998	4
1999	5
2000	6

فتكون القيم الممثلة لـ(س) عند دراسة الاتجاه العام لهذه الفترة هى 2,1,......, 6 ويمكن استخدام معادلة الاتجاه العام فى التنبؤ بالمستقبل خلال سنة مستقبلية كما يتضح من المثال التالى :

مثال : الجدول التالى يوضح تطور إنتاج سلعة ما خلال الفترة 1995 – 1999 والمطلوب .

1- إيجاد معادلة الاتجاه العام التى تمثل هذا التطور فى الإنتاج .

2- التنبؤ بقيم إنتاج السلعة فى عام 2005 .

السنوات (س)	1995	1996	1997	1998	1999
الإنتاج (ص)	3	4	2	5	4

الحل : نحول السنوات إلى أرقام كما يتضح من جدول الحل .

	س	ص	س ص	$س^2$
	1	3	3	1
	2	4	8	4
	3	2	6	9
	4	5	20	16
	5	4	20	25
المجموع	15	18	57	55

حيث $\bar{س} = \frac{15}{5} = 3$ ، $\bar{ص} = \frac{18}{5} = 3.6$

$$\therefore \text{ب} = \frac{\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\text{مجـ س}^2 - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{57}{5} - 3 \times 3.6}{55 - \left(\frac{15}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{0.8}{46} = 0.02 \text{ تقريباً}$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\,\bar{\text{س}}$$

$$= 3.6 - 0.02 \times 3 = 3.54$$

∴ معادلة الاتجاه العام الزمنى من الدرجة الأولى هى

$$\hat{\text{ص}}_{\text{هـ}} = 3.54 + 0.02 \text{ س}_{\text{هـ}}$$

وتوضح هـذه المعادلة أن كمية الإنتاج مـن هـذه السلعة متزايدة خـلال الفـترة 1995–1999) وذلـك لأن إشـارة معلمـة (ب) موجبـة وأن مقـدار التغير السـنوى يقـدر بحوالى 0.02 سـنوياً وبقسـمة مقدار التغير السـنوى علـى متوسـط الإنتـاج السـنوى (ص) أى 3.6/0.02 وهـو يسـاوى 0.005 ، وأن نسبة الزيادة السنوية مـن المتوسط السـنوى تقدر بحوالى 0.55٪

أى أن معدل الزيادة السنوى = $\frac{ب}{\bar{ص}} \times 100\%$

التنبؤ بكمية الإنتاج عام 2005 :

أى تحويل سنة 2005 إلى رقم وبالتعويض عنه فى معادلة الاتجاه العام الزمنى (التعويض عن قيمة س بهذا الرقم) نحصل على قيمة ص التى تعنى كمية الإنتاج المتوقعة عام 2005 .

ولتحويل سنة 2005 إلى رقم نبدأ الترقيم من أول الفترة الزمنية وهى عام 1995 حتى نصل إلى سنة 2005 من المعادلة الآتية :

الرقم المطلوب = 2005 – 1995 + 1 = 11

وجمعنا 1 لأن سنة 1995 تدخل فى الاعتبار مع سنة 2005

∴ كمية الإنتاج عام 2005 هى :

$\hat{ص}_{هـ} = 3.54 + 0.02 \times 11 = 3.76$

التطبيق على السلاسل الزمنية:

إذا كان المتغير (س) هو الزمن فإن البيانات تظهر قيم س عند أوقات مختلفة . وتسمى البيانات المرتبة وفقاً للزمن باسم السلاسل الزمنية ، ويعنى خط انحدار ص على س فى هذه الحالة بخط الاتجاه العام ويستخدم غالباً لأهداف التوقع أو التنبؤ Forecasting .

ووفقاً لهذه الطريقة يجب جعل عدد السنوات مساوياً للصفر وذلك يجعل السنة الوسطى فى السلسلة الزمنية يأخذ قيمة صفر والسنوات التى قبلها تأخذ أرقام سالبة من -1 إلى ....الخ بالترتيب ،

والسنوات التى بعدها تأخذ أرقام موجبة من +1 إلى .... الخ بالترتيب .

وتأخذ معادلة الانحدار الصيغة التالية عندما يكون مجـ س = صفر .

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س

مجـ ص = ن أ – صفر

$$\therefore \text{أ} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ $س^2$

مجـ س ص = صفر + ب مجـ $س^2$

$$\therefore \text{ب} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^2}$$

والمثال التالى تطبيق على استخدام السلاسل الزمنية

مثال : الجدول التالى يبين إنتاج سلعة ما بالطن خلال الفترة 84-1994

والمطلوب :

1- إيجاد معادلة خط انحدار ص على س

2- تقدير الإنتاج فى عامى 2000 ، 2005

السنوات	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
الإنتاج	2	3	4	2	6	5	3	2	4	6	3

الحل :

	السنوات	س	ص	س ص	$س^2$
	1984	5-	2	10-	25
	1985	4-	3	12-	16
	1986	3-	4	12-	9
	1987	2-	2	4-	4
السنة الوسطى	1988	1-	6	6-	1
	1989	صفر	5	صفر	صفر
	1990	1+	3	3	1
	1991	2+	2	4	4
	1992	3+	4	12	9
	1993	4+	6	24	16
	1994	5+	3	15	25
المجموع		صفر	40	14	110

حيث أن عدد السنوات فى هذا التمرين فردى فإنه تم وضع س = صفر للسنة الوسطى وهى 1998 بحيث يكون عدد السنوات التى قبلها مساوياً لعدد السنوات التى بعدها وبذلك يكون مجـ س = صفر

$$أ = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{40}{11} = 3.64$$

$$ب = \frac{مجـ\ س\ ص}{مجـ\ س^2} = \frac{14}{110} = 0.13$$

∴ معادلة الانحدار هى :

$$\hat{ص}_{هـ} = 3.64 + 0.13\ س_{هـ}$$

لحساب التنبؤ بكمية الإنتاج عام 2000 ، 2005

حيث أن السنة 1989 تناظر س = صفر

فإن السنوات 2000 ، 2005 تناظر س = 11 ، س = 16 على الترتيب

وبالتعويض فى معادلة الانحدار عن س = 11 ثم س = 16 نحصل على

ص^هـ = 3.64 + 0.13 × 11 = 5.07

ص^هـ = 3.64+ 0.13 × 16 = 5.72

مثال: الجدول التالى يبين قيمة الإنتاج المحلى من سلعة ما خلال الفترة 1985–1994

السنوات	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
الإنتاج	1	4	2	3	4	2	1	6	8	9

المطلوب:

1- توفيق معادلة الخط المستقيم الممثل لهذه البيانات

2- التنبؤ بقيمة الإنتاج المحلى عام 2005 .

الحل :

فى حالة عندما يكون عدد سنوات السلسلة الزمنية زوجى نأخذ منتصف السنة الوسطى كأساس (منتصف 89 – 90) .

السنوات	س	س×2(*)	ص	س ص	$س^2$
1985	4.5-	9-	1	9-	81
1986	3.5-	7-	4	28-	49
1987	2.5-	5-	2	10-	25
1988	1.5-	3-	3	9-	9
1989	.5-	1-	4	4-	1
90/89	صفر	صفر			
1990	.5+	1	2	2	1
1991	1.5+	3	1	3	9
1992	2.5+	5	6	30	25
1993	3.5+	7	8	56	49
1994	4.5+	9	9	81	81
المجموع	صفر	صفر	40	112	330

(*) ضربنا فى 2 للتخلص من الكسور

$$أ = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{40}{10} = 4$$

$$ب = \frac{مجـ\ س\ ص}{مجـ\ س^2} = \frac{112}{330} = 0.34$$

معادلة الخط المستقيم هى :

$$\hat{ص}_{هـ} = 4 + 0.34\ س_{هـ}$$

للتنبؤ بقيمة الإنتاج المحلى عام 2005

سنأخذ س عند سنة 2005 وهى س = 21

ص^هـ = 4 + 0.34 × 21 = 11.14

أمثلة عامة :

(1) الجدول التالى يوضح العلاقة بين قيمة الانفاق الاستهلاكى (ص) بالدينار ومقدار الدخل الممكن التصرف فيه (س) والمطلوب :

- تقدير معادلة انحدار ص/س بطريقتى المربعات الصغرى والعزوم مفسراً النتيجة .
- اختبار معنوية معامل الانحدار .
- تقدير معامل الارتباط ومعامل التحديد مفسراً النتيجة .
- اختبار معنوية معامل الارتباط .

	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
	114	102	11628	12996	10404
	118	106	12508	13924	11236
	126	108	13608	15876	11664
	130	110	14300	16900	12100
	136	122	16592	18496	14884
	140	124	17360	19600	15376
	148	128	18944	21904	16384
	156	130	20280	24336	16900
	160	142	22720	25600	20164
	164	148	24272	26896	21904
	170	150	25500	28900	22500
	178	154	27412	31684	23716
المجموع	1740	1524	225124	257112	197232
المتوسط	145	127			

الحل :

أولاً : بطريقة المربعات الصغرى

$$\hat{ب} = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2}$$

$$= \frac{12\ (225124) - (1740)\ (1524)}{12\ (257112) - (1740)^2} = 0.86$$

$$\hat{أ} = \bar{ص} - \hat{ب}\bar{س} = 127 - 0.86\ (145) = 2.30$$

وتكون معادلة خط الانحدار المقدر للاستهلاك هى :

$$\hat{ص} = 2.30 + 0.86\ س$$

تفسير النتيجة :

معامل انحدار هذه الدالة هو ($\hat{ب} = 0.86$) وهو ميل خط الانحدار المقدر الذى يقيس الميل الحدى للاستهلاك أو التغير الذى طرأ على الاستهلاك نتيجة لتغير الدخل بمقدار وحدة واحدة، بمعنى أن زيادة الدخل بمقدار وحدة واحدة يتبعه زيادة الأنفاق الاستهلاكى بمقدار 0.86 وحدة .

ثانياً : تقدير معامل الانحدار بطريقة العزوم :

$$ع_{س\ ص} = مجـ\ س\ ص - \frac{(مجـ\ س)\ (مجـ\ ص)}{ن}$$

$$= 225124 - \frac{1524 \times 1740}{12} = 4144$$

$$ع_{س س} = مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن} = 2557112 - \frac{(1740)^2}{12} = 4812$$

$$ع_{ص ص} = مجـ ص^2 - \frac{(مجـ ص)^2}{ن} = 197232 - \frac{(1524)^2}{12} = 3684$$

$$\hat{ب} = \frac{ع_{س ص}}{ع_{س س}} = \frac{4144}{4812} = 0.86$$

$$\hat{أ} = \bar{ص} - ب \bar{س} = 2.30$$

وتكون معادلة خط الانحدار المقدرة للاستهلاك هى

$$\hat{ص} = 2.30 + 0.86 س$$

وللكشف عن معنوية معامل الانحدار ($\hat{ب}$) فيجب الحصول على قيمة (ت) المحسوبة بإتباع الخطوات السابق ذكرها كما يلى:

$$تباين البواقى = ع_{ص ص} - \hat{ب} \times ع_{س ص}$$

$$= 3684 - (0.86)(4144) = 120.16$$

$$تباين الخطأ = تباين البواقى \times \frac{ن}{ن - 2}$$

$$= 120.16 \times \frac{12}{10} = 144.19$$

$$\text{تباين معامل الانحدار}(\hat{ب}) = \frac{\text{تباين الخطأ}}{ن \times ع^2_{س}} = \frac{144.19}{12 \times 4812} = 0.002$$

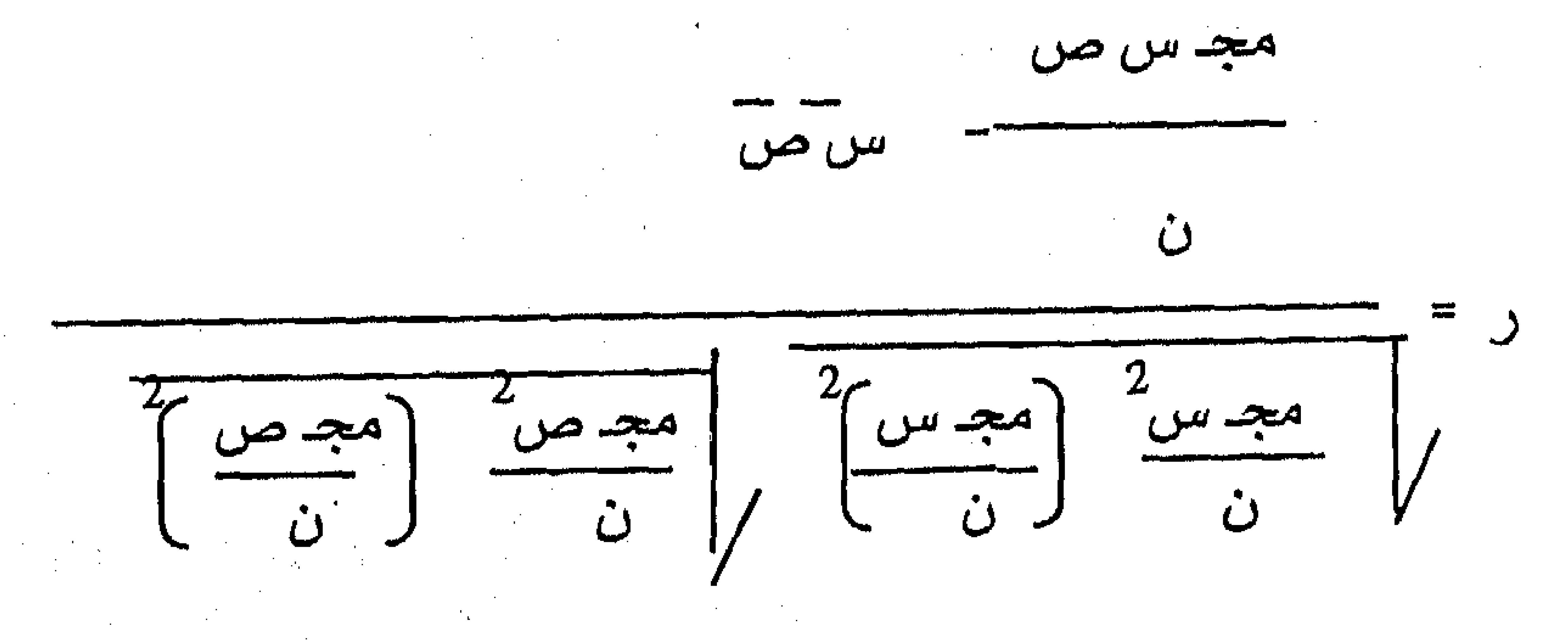
$$\text{الخطأ القياسى} = \sqrt{\text{تباين (ب)}} = \sqrt{0.002} = 0.045$$

$$\text{ت المحسوبة} = \frac{ب}{\text{الخطأ القياسى}} = \frac{0.86}{0.045} = 19.11$$

وبمقارنة (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية عند مستوى المعنوية (0.05) ودرجة حرية (ن = 10) نجد إنها تساوى (2.228) أى أن قيمة ت المحسوبة أكبر من قيمة ت الجدولية أى أن معامل الانحدار معنوى وتكون الصيغة القياسية لمعادلة الانحدار هى : $\hat{ص}_{هـ}$ = 2.30 + 0.086 س

(19.11)

تقدير معامل الارتباط :



$$ر = \frac{\frac{\text{مجـ س ص}}{ن} - \bar{س}\,\bar{ص}}{\sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{ن}\right)^2}\ \sqrt{\frac{\text{مجـ ص}^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجـ ص}}{ن}\right)^2}}$$

$$ر = \frac{22512 - \frac{127 \times 145}{12}}{\sqrt{57112 - \frac{(145)^2}{12}}\ \sqrt{197232 - \frac{(127)^2}{12}}} = 0.98$$

وهــذه النتيجــة تعنــى وجــود ارتبــاط قــوى بــين قيمــة الأنفــاق الاستهلاكى ومقدار الدخل ويلاحظ أن قيمة معامل الارتباط موجبة لأن قيمة معامل الانحدار موجبة .

إيجاد معامل التحديد ($ر^2$) :

معامل التحديد ($ر^2$) = مربع معامل الارتباط = $(0.98)^2 = 0.96$

وهذه النتيجة تعنى أن 96٪ من التغير فى الأنفاق الاستهلاكى يفسرها التغير فى الدخل بينما الباقى وهو 4٪ يعود إلى عوامل أخرى لم يتضمنها نموذج الانحدار البسيط .

اختبار معنوية معامل الارتباط :

لاختبـار معنويـة معامـل الارتبـاط يجـب اسـتخدام اختبـار ت ذو الـذيلين بـدرجات حريـة (ن – 2) حيـث ن = 12 وعلـى ذلـك فـإن النظريـة الفرضية (الصفرية) والنظرية البديلة يمكن صياغتها كما يلى:

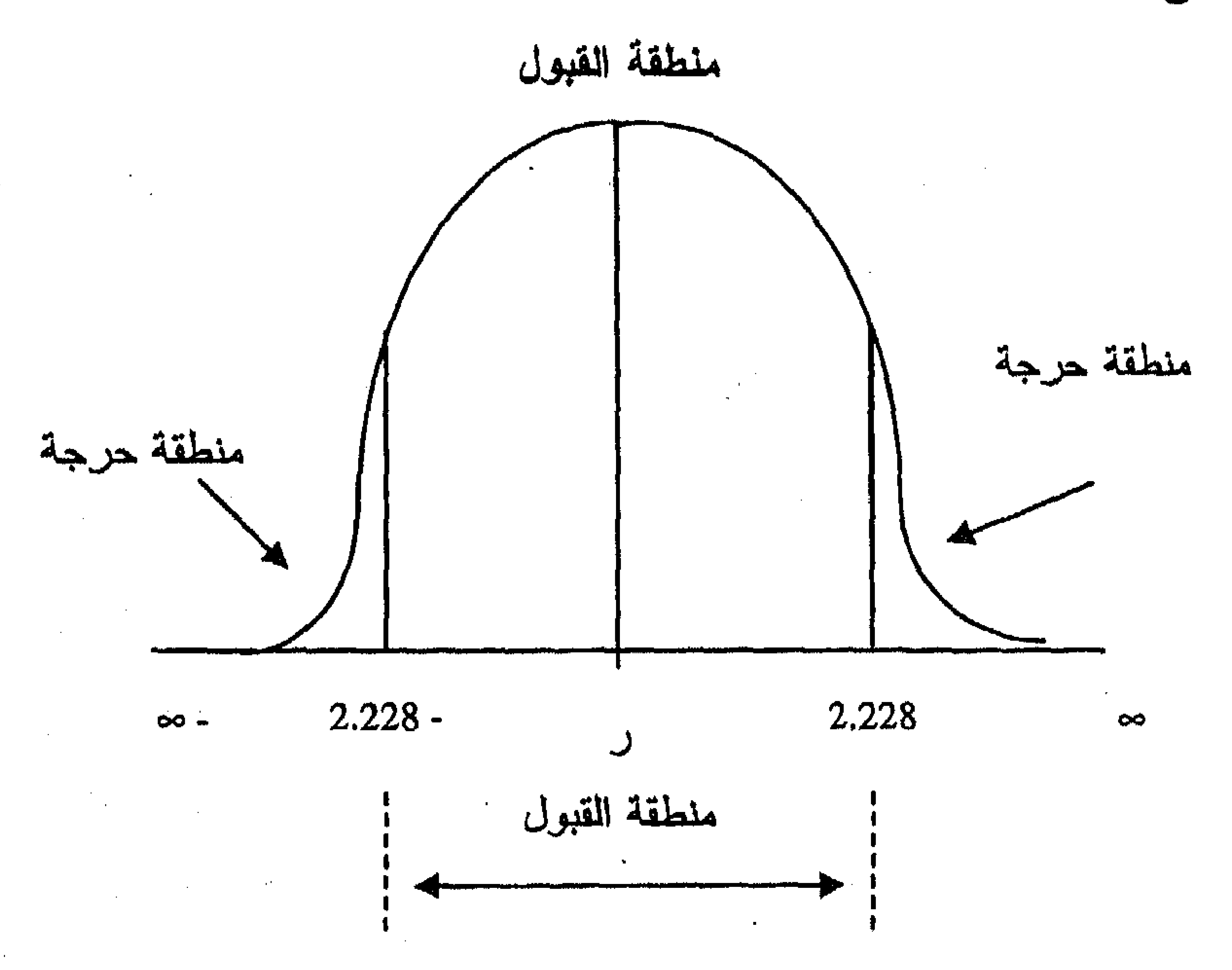
H_5 : ر = صفر النظرية الفرضية

H_1 : ر ≠ صفر النظرية البديلة .

وبحساب قيمة (ت) كما يلى :

$$ت_ر = \frac{ر\sqrt{ن - 2}}{\sqrt{1 - ر^2}} = \frac{0.98\sqrt{12 - 2}}{\sqrt{1 - 0.96}} = 15.50$$

أما قيمة (ت) الجدولية عند مستوى 0.05 ودرجة حرية 10 فيهما تساوى 2.228 وعلى ذلك فإن قيمة (ت) المحسوبة لمعامل الارتباط أكبر من قيمتها الجدولية فإن معامل الارتباط يكون معنوى ويمكن توضيح هذا الاختبار فى الشكل التالى :



ومن الشكل يلاحظ أن قيمة (ت) المحسوبة وهى 15.5 تبعد عن منطقة قبول الفرض البديل وتجعله يقع فى المنطقة الحرجة .

تمارين

(1) أوجد معادلتى انحدار ص على س ، س على ص من واقع بيانات الجدول التالى :

س	5	8	6	3	4
ص	2	7	3	5	1

(2) من بيانات الجدول التالى :

س	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ص	9	8	7	6	5	4	3	2	1

أوجد : أ – معادلة انحدار ص على س

ب- التنبؤ بقيمة ص عندما س = 12

(3) أوجد معادلة انحدار س على ص وتنبأ بقيمة ص عندما س = 15 من البيانات التالية :

س	1	3	5	7	9	11
ص	12	10	8	6	4	2

(4) إذا كانت قيمة الإنتاج الكلى لإحدى الشركات خلال الفترة من 94- 2000 بالألف دينار موضحة بالجدول التالى :

السنوات	94	95	96	97	98	99	2000
قيمة الإنتاج	68	72	74	77	81	83	86

المطلوب: توفيق خط انحدار لقيمة الإنتاج على الزمن ثم قدر قيمة الإنتاج عام 2005

(5) الجدول التالى يوضح العلاقة بين قيمة الإنفاق على الإعلان لسلعة ما خلال التليفزيون وبين قيمة المبيعات من هذه السلعة بالألف دينار .

قيمة الإنفاق	10	12	18	16	14	8
قيمة المبيعات	120	160	240	190	130	90

المطلوب : توفيق معادلة انحدار قيمة المبيعات على قيمة الإنفاق من الإعلان بطريقة العزوم . ثم تنبأ بقيمة المبيعات عندما يكون المنفق على الإعلان 50 .

(6) من بيانات الجدول التالى :

س	14	23	9	17	10	22	5	12	6	16
ص	68	15	40	79	81	95	31	72	45	93

المطلوب :

1- رسم خط الانتشار

2- أوجد معادلة الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى

3- احسب خطأ التقدير $ع_{ص/س}$

(7) من واقع البيانات التالية :

مجـ س = 1.23   مجـ ص = 7.9

مجـ س ص= 1.61   مجـ $س^2$ = 17.32

مجـ $ص^2$ = 29.3   ن = 10

أوجد :

أ – معادلة انحدار ص على س ، س على ص

ب- احسب خطأ التقدير $ع_{ص/س}$ ، $ع_{س/ص}$

(8) إذا كانت 6 س + 4 ص = 36 أوجد

أ – قيمة س عندما ص = 6

ب- قيمة ص عندما س = 4

جـ- الجزء المقطوع من محور ص

د – الجزء المقطوع من محور س

(9) أمكن التوصل إلى البيانات التالية عن المتغيرين س ، ص

مجـ س = 48 ، مجـ $س^2$ = 536 ، مجـ س ص = 720 ،

مجـ ص= 78 ، مجـ $ص^2$ = 1108 ، ن = 6

والمطلوب : (1) إيجاد معادلة انحدار ص على س بطريقة العزوم

(2) احسب خطأ التقدير $ع_{ص/س}$.

(10) إذا علمت أن الانحراف المعيارى لقيم س هو 0.39 والانحراف المعيارى لقيم ص هو 1.24 ومعامل الارتباط هو 0.8 فأحسب معامل انحدار ص/س.

(11) إذا علمت أن معادلتى انحدار ص على س ، س على ص هما

ص = 2.3 + 0.78 س

س = 4.2 + 1.56 ص

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين .

(12) إذا علمت أن معادلتى انحدار ص على س ، س على ص هما

ص = 5.6 - 0.40 س

س = 8.6 + 0.80 ص

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين

(13) الجدول التالى يوضح تطور الإنتاج من سلعة ما خلال الفترة 92- 98

السنوات	92	93	94	95	96	97	98
الإنتاج	10	12	16	17	19	18	15

المطلوب :

1- أوجد معادلة الاتجاه العام الزمنى .

2- تنبأ بنتيجة الإنتاج عام 2005 .

(14) إذا علمت أن

مجـ س = 28 ، مجـ ص = 35 ، مجـ س ص = 164 ،

مجـ $س^2$ = 80 ، مجـ $ص^2$ = 125 ، س = 4 ، ص = 5

المطلوب :

(1) قدر معادلة انحدار ص على س بطريقة العزوم .

(2) قدر المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار .

(3) تنبأ بقيمة ص عندما س = 100 .

الفصل السابع

مبادئ الاحتمالات

تمهيد:

تمثل نظرية الاحتمالات شأناً كبيراً بين الدراسات الرياضية والإحصائية نظراً لما لها من استخدامات تطبيقية فى كافة نواحى حياتنا اليومية خاصة فى مجال إتخاذ القرارات فى النواحى الإدارية والاقتصادية وبعض العلوم الأخرى مثل علم الإحصاء وعلم الوراثة، هذا بالإضافة إلى أن أسلوب التنبؤ وتحديد الاتجاهات المستقبلية للعديد من الظواهر إنما يعتمد كثيراً على الأسس النظرية والإحصائية لتحديد التوقع .

وقبل الدخول فى نظرية الاحتمالات يجب الإشارة إلى بعض التعاريف الخاصة بالتباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين وهى أحد الوسائل المستخدمة فى شرح نظرية الاحتمالات.

التباديل :

إذا تم ترتيب عناصر مجموعة ما وفقاً لنظام معين فإنه يطلق على مثل هذا النظام اسم تبديل ويمكن معرفة عدد التباديل التى يمكن الحصول عليها عند اختيار (ر) عنصر من مجموعة مكونه من (ن) عنصر باستخدام القانون الآتى :

$$\text{عدد التباديل} = {}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

ملخص لقوانين التباديل

(1) إذا كان لدينا عدة عمليات الأولى تحدث بعدد من الطرق بمقدار (أ) والثانية تحدث بعدد من الطرق مقداره (ب) والثالثة تحدث بعدد من الطرق مقداره (جـ) فإن عدد الطرق أو عدد الترتيبات المختلفة التى يمكن أن تحدث بها هذه العمليات مع بعضها = أ × ب × جـ .

(2) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر فإن هذه العناصر يمكن ترتيبها بجانب بعضها (أى فى صف) بعدد من الترتيبات مقداره .

= ن (ن - 1) (ن - 2) .... = ن!

(3) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر والمراد ترتيبها فى صورة دائرية فإن عدد هذه الترتيبات = (ن – 1)!

(4) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر والمراد ترتيبها فى مجموعات وكانت كل مجموعة تحتوى عدد (ر) من العناصر. أو بمعنى آخر إذا كان لدينا (ن) من العناصر وعدد (ر) من فرص الاختيار من هذه العناصر فإن عدد طرق ترتيب هذه المجموعات =

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

(5) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر وهذه العناصر منها عدد مقداره (ر) من العناصر المتشابهة تماماً وعدد مقداره (ج) من العناصر المتشابهة تماماً مع بعضها فإن عدد طرق ترتيب العدد (ن) من العناصر السابقة

$$= \frac{ن!}{ر!\ ج!}$$

ملحوظة : لاحظ أن

$$^{ن}ل_{ن} = \frac{ن!}{(ن - ن)!} = \text{صفر}$$

$$= \frac{\text{ن!}}{\text{صفر!}} = \text{ن !}$$

مثال : (1)

إذا كان لدينا 5 حروف (أ ، ب ، جـ ، د ، هـ) فما هو عدد التباديل اللازمة لأخذ 3 حروف منهم .

الحل :

$$\text{عدد التباديل} = {}^{5}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{5\,!}{(5-3)\,!} = \frac{5\,!}{2\,!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60 \text{ تبديل}$$

ملحوظة :

ن! = ن (ن − 1) (ن − 2) (ن − 3)............

$6\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

مثال : (2)

بكم طريقة يمكن اجلاس 7 أشخاص على مائدة مستديرة ؟

الحل :

فى حالة الدائرة بمكن اجلاس فرد واحد فى أى مكان ثم ترتيب بقية الأشخاص أى أن :

عدد الطرق = (ن − 1)! = (7 − 1) ! = 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1

= 720 طريقة .

مثال : (3)

ما هو عدد الطرق التى يمكن بها غرس 10 شجرات مختلفة الأنواع دائرياً حول منزل ؟

الحل:

عدد الطرق = (ن − 1) ! = (10 − 1)! = 9 ! = 362880 طريقة .

التوافيق :

عدد الطرق التى يمكن اختيار (ر) تحدث مجموع مختلفة من مجموعة بها (ن) عنصر هى

$$= \frac{ن!}{(ن - ر)!\ ر!}$$

وتكتب فى الصورة $^{ن}ق_{ر}$ أو $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix}$ وتنطق (ن) فوق (ر)

حيث $\begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\ ر!}$

لاحظ أن :

(1) $\begin{pmatrix} ن \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ن \\ ن \end{pmatrix} =$ حيث :

$$\binom{ن}{0} = \frac{ن!}{(ن-0)!\ صفر!} = \frac{ن!}{ن!} = 1$$

$$\binom{ن}{ن} = \frac{ن!}{(ن-ن)!\ ن!} = \frac{ن!}{0!\ ن!} = \frac{ن!}{ن!} = 1$$

(2) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$

أى أن : $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

(3) $\binom{ن}{1} = \binom{ن}{ن}$

(4) $(ن_1 ، ن_2 ، ن_3) = \frac{ن!}{ن_1!\ ن_2!\ ن_3!}$ أى أن :

$$\binom{7}{2 ، 3 ، 4} = \frac{7!}{2!\ 3!\ 4!} = \frac{5040}{32} = 107$$

مثال : (4)

أوجد عدد الطرق المختلفة التى نحصل بها على 3 وجوه و 5 ظهور عند إلقاء 8 عملات معدنية متزنة .

الحل :

المطلوب معرفة ما هو عدد الطرق التى يمكن بها اختيار ثلاث رميات نحصل منها على وجه من 8 عملات .

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!\,3!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2} = 56 \text{ طريقة}$$

مثال : (5)

يجرى انتخاب شخصين من بين 12 مرشح ما هى عدد الطرق التى يمكن بها اختيار شخصين مختلفين .

الحل :

فى هذه الحالة لا نهتم بترتيب الشخصين المنتخبين أيهما يكون الأول وأيهما الثانى وبذلك فأننا أما حالة توافيق .

$$\therefore \text{عدد الطرق} = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{(12-2)!\,2!}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!\,2!} = 66 \text{ طريقة}$$

ملحوظة :

يلاحظ أنه بينما نهتم بالترتيب عند إجراء التباديل لا نهتم به عند إجراء التوافيق فالمجموعة أب ، ب أ هما تبدلين مختلفين حيث يهمنا ترتيبهما ولكنهما توفيقاً واحداً حيث لا يهمنا ترتيبهما.

مثال: (6)

بكم طريقة يمكن انتخاب 10 مرشحين من بين 12 مرشحاً .

الحل : هنا كالمثال السابق نفس العدد من المرشحين (ن) ولكن اختلف العدد الذى يجب اختياره .

$$\therefore \text{عدد الطرق} = \binom{ن}{ر} = \frac{12!}{(12-10)!\,10!}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10!}{2! \times 10!} = 66 \text{ طريقة}$$

<u>استنتاج</u> : يلاحظ أن $\binom{12}{2} = \binom{12}{10} = 66$

مثال : (7)

امتحان مكون من أربعة أسئلة ما هى عدد الاحتمالات الممكنة لإجابات الطلبة لهذا الامتحان .

الحل :

إن الاحتمالات الرئيسية أن الطالب قد يجيب على أربعة أسئلة أو على ثلاثة أو على سؤالين أو سؤال واحد أو لا يجيب على الأسئلة كلها ولذلك فإن الحل هو مجموعة الاحتمالات السابقة .

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$ احتمال

تمارين

(1) بكم طريقة يمكن زرع 8 أشجار مختلفة الأنواع دائرياً حول منزل ؟

(2) ما هو عدد الطرق اللازمة لجلوس 6 أشخاص فى صف مستقيم ؟

(3) تم ترشيح تسعة أفراد لتعينهم فى وظائف مدرس مساعد ومعيد ، ما هى الطرق الممكنة التى يمكن اختيار ثلاثة أفراد لتعينهم فى هذه المناصب ؟

(4) بكم طريقة يمكن إعادة ترتيب حروف كلمة جنت ، بروكسل ، بلجيكا ، إسكندرية ، إيطاليا ، مراكش ، القسطنطينية .

(5) ما هى النتائج الممكن حدوثها لإحدى فرق كرة القدم لعب 6 مباريات مع العلم بأن نتيجة المباراة الفوز أو التعادل أو الهزيمة ؟

(6) يراد انتخابات مجلس إدارة جمعية تعاونية زراعية من 6 أفراد من صغار المزارعين و 4 أفراد من كبار المزارعين وكان المرشحون من صغار الزراع 10 أفراد ومن كبار الزراع 9 أفراد . بكم طريقة يمكن أن يتم هذا الانتخاب .

نظرية ذات الحدين

مفكوك ذات الحدين لأس صحيح موجب :

يقصد بالحدين هما مقدار جبرى مكون من حدين مثل (أ + ب) أو (س + ص) أو غيرهما .

منطوق النظرية :

إذا كانت (ن) عدد صحيح موجب فإن

$$(\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + \binom{\text{ن}}{1}\text{ص}\,\text{س}^{\text{ن}-1} + \binom{\text{ن}}{2}\text{ص}^{2}\,\text{س}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots\,\text{ص}^{\text{ن}}$$

يلاحظ أن عدد الحدود = (ن + 1) دائماً فإذا كان لدينا المقدار $(\text{س}+\text{ص})^4$ فإن مفكوك هذا المقدار يحتوى على 5 حدود أى (4 + 1) .

ويمكن ترتيب المعاملات المختلفة لمفكوك ذات الحدين وفقاً للمثلث التالى والذى يسمى مثلث بسكال لمعاملات مفكوك ذات الحدين

الأس	المعاملات
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

ولتكوين هذا المثلث ما علينا إلا أن نكتب المعاملين للأس 1 وهما (1 ، 1) ثم كتابة المعاملات التالية فكل معامل منها هو نتيجة جمع المعامل العلوى له والمعامل الذى على يمين هذا العلوى فمثلاً للحصول على المعامل الثالث للأس الخامس فهو حاصل جمع العلوى له وهو 6 والذى على يمينه وهو 4 مع العلم بأن المعامل الأول والأخير كلاهما يساوى 1 دائماً بالنسبة لأى أس .

كما يلاحظ أن المعامل الأول = المعامل الأخير والمعامل الثانى = المعامل قبل الأخير والمعامل الثالث = المعامل قبل قبل الأخير وهكذا . ولذلك فإذا كان عدد المعاملات زوجى أن كل أثنين من المعاملات متساويين مثل حالة الأس الثالث أو الخاص من المثلث السابق . أما إذا كان عدد المعاملات فردى فإن كل معامل يكون له نظير فيما عدا معامل الحد الأوسط ما فى حالة الأس الثانى أو الرابع .

إيجاد حد من حدود ذات الحدين :

من المعروف أن الحد الأول فى مفكوك ذات الحدين

$$= \binom{\text{ن}}{0} = \text{ص}^{0}\ \text{س}^{\text{ن}}$$

والحد الثانى $= \binom{\text{ن}}{1} = \text{ص}^{1}\ \text{س}^{\text{ن}-1}$

والحد الثانى $= \binom{\text{ن}}{1} = \text{ص}^{2}\ \text{س}^{\text{ن}-2}$

$$\text{الحد رقم } (ر + 1) = \binom{ن}{ر+1-1} ص^{ر} س^{ن-ر}$$

$$= \binom{ن}{ر} = ص^{ر} س^{ن-ر}$$

∴ لإيجاد الحد رقم 7 من مفكوك $(س + ص)^{12}$ يكون على الصورة

$$= \binom{ح}{6+1} \binom{ن}{6} ص^{6} س^{ن-6}$$

مثال : (8)

أكتب مفكوك المقدار $(س + ص)^{4}$

الحل :

$$(س+ص)^{4} = \binom{4}{0} س^{4} + \binom{4}{1} س^{3} ص + \binom{4}{2} س^{2} ص^{2} + \binom{4}{3} س ص^{3}$$

$$+ \binom{4}{4} ص^{4}$$

$$= س^{4} + 4 س^{3} ص + 6 س^{2} ص^{2} + 4 س ص^{3} + ص^{4}$$

مثال : (9) أكتب مفكوك $(4 س + 5 ص)^{4}$

الحل:

$$(4\text{س}+5\text{ص})^4 = \binom{4}{0}(4\text{س})^4 + \binom{4}{1}(4\text{س})^3(5\text{ص}) + \binom{4}{2}(4\text{س})^2(5\text{ص})^2$$

$$+ \binom{4}{3}(4\text{س})(5\text{ص})^3 + \binom{4}{4}(5\text{ص})^4$$

$$= 256\,\text{س}^4 + 128\,\text{س}^3\,\text{ص} + 2400\,\text{س}^2\,\text{ص}^2 + 2000\,\text{س}\,\text{ص}^3 + 625\,\text{ص}^4$$

مثال : (10)

أوجد الحد الخامس من مفكوك $(2\text{أ} + \text{ب})^8$

الحل :

$$\text{ح}_5 = \binom{\text{ح}}{4+1} = \frac{8!}{4!\,4!}(2\text{أ})^4(\text{ب})^4 = 1120\,\text{أ}^4\,\text{ب}^4$$

مثال : (11)

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد جملة مبلغ 100 الف دينار استثمر لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة 4٪ سنوياً .

الحل:

إيجاد جملة المبلغ بفائدة مركبة مقدارها 4٪ لمدة 5 سنوات هى

$$(1 + 40\text{ر})^5 = 1 + \binom{5}{1}0.40 + \binom{5}{1}(0.40)^2 + \binom{5}{1}(0.04)^3$$

$$+ \binom{5}{1}(0.04)^4 + (0.04)^5$$

$$= 1 + 0.2 + 0.016 + 0.00064 + 0.0000128 = 1.2167 \times 100000$$

= 121670 دينار .

مثال : (12)

أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(3 + 2\text{س})^9$

الحل :

حيث أن أس المقدار عدد فردى يكون هناك حدان أوسطان ترتيبهما

$\frac{9+1}{2}$ ، $\frac{9+3}{2}$ أى الحد الخامس والحد السادس

الحد الخامس = $ح_5 = \binom{ح}{4+1} = \binom{9}{4} (3)^5 (2\text{س})^4 = 489888\text{س}^4$

الحد السادس = $ح_6 = \binom{ح}{5+1} = \binom{9}{5} (3)^4 (2\text{س})^5$

مثال : (13)

أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(4\text{س} + 5\text{ص})^4$

الحل :

حيث أن أس المقدار عدد زوجى فيوجد حد أوسط واحد فقط ترتيبه

$$\frac{4+1}{2} = 3$$

أى الحد الثالث حيث أن هذا الحد يأتى بعده حدان وقبله حدان وبذلك يقع فى المنتصف تماماً

$$ح_3 = ح_{(2 + 1)} = \binom{4}{3} (4 س)^2 (5 ص)^2$$

$$= 2400 \ س^3 \ ص^2$$

تمارين

(1) أوجد مفكوك $(س + ص)^{6}$

(2) أوجد مفكوك $(أ + ب)^{7}$

(3) أوجد مفكوك $(2 س + 3 ص)^{6}$

(4) أوجد مفكوك $(5 س + 2 ص)^{4}$

(5) أوجد الحد الثالث والخامس من مفكوك $(5 س + 10 ص)^{8}$

(6) أوجد جملة مبلغ 50000 دينار استثمر لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة قدرها 5٪ نصف سنوياً .

(7) أوجد : أ – الحد الذى يحتوى على $س^{6}$ فى مفكوك $(س + ص)^{12}$

ب – الحد السادس فى مفكوك $(س + 3 ص)^{9}$

جـ – معامل $س^{11}$ $ص^{12}$ فى مفكوك $(س + ص)^{23}$

(8) أوجد الحد الأوسط فى مفكوك :

(1) $(3 س + 4 ص)^{11}$ ، (2) $(أ + 3 ب)^{8}$

الاحتمالات البسيطة

Simple Probability

يمكن تعريف احتمال وقوع الحادث (أ) فى تجربة ما بأنه النسبة بين عدد النتائج التى يتكون منها الحادث (أ) وبين عدد النتائج الكلية فى التجربة فإذا رمزنا للاحتمال (أ) بالرمز ح (أ) فإن

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد النتائج التى يتكون منها الحادث (أ)}}{\text{عدد النتائج الكلية فى التجربة}}$$

وإذا علمنا أن احتمالات أى تجربة هو النجاح أو الفشل فإن مجموع احتمال النجاح والفشل يجب أن يكون مساوياً (الواحد الصحيح) بمعنى آخر آن مجموع احتمالات أى تجربة يساوى الواحد الصحيح وعموماً سنجد أن الاحتمال يأخذ شكل نسبة تتراوح بيت الواحد الصحيح One و الصفر Zero

مثال : (14)

إذا ألقيت زهرة من زهر النرد على سطح أملس فأوجد احتمال الحصول على : (1) العدد 4 ، (2) عدد زوجى

الحل : نعلم أن للزهرة ستة أوجه تحمل الأعداد (6,5,4,3,2,1) وعلى ذلك فعند إلقاء الزهرة نجد أن :

عدد النتائج الكلية الممكنة لهذه التجربة = 6

وعدد النتائج التى يتكون منها الحادث (الحصول على 4) هى نتيجة واحدة فقط لأنه لا توجد على الزهرة غير (4) واحدة وبالتالى فإن :

1) ح (4) = $\frac{1}{6}$

2) ح (عدد زوجى) = $\frac{3}{6}$

مثال : (15)

سكشن به 30 طالب وطالبه منهم 19 من الذكور والبقية من الإناث فإذا اخترنا طالباً بطريقة عشوائية فما هو احتمال أن يكون فتاه .

الحل :

عدد الإناث فى السكشن = 30 – 19 = 11 فتاه

ح (اختيار فتاه) = $\frac{11}{30}$

مثال : (16)

سحب كارت بطريقة عشوائية من مجموعة كاملة من ورق اللعب تحتوى على 52 كارت منها 26 كارت أسود ، 26 كارت أحمر، 13 كارت سباتى وأربع آسات .... فأوجد :

1) احتمال سحب كارت أحمر

2) احتمال سحب كارت سباتى

3) احتمال سحب كارت آس

الحل :

(1) ح (سحب كارت أحمر) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(2) ح (سحب كارت سباتى) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(3) ح (سحب كارت آس) = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

مثال : (17)

إذا ألقيت زهرتين من زهر النرد على سطح أملس فأوجد احتمال:

(أ) الحصول على مجموع (2)　　(ج) الحصول على مجموع (4)

(ب)الحصول على مجموع (3)　　(د) الحصول على مجموع (11)

الحل :

كل زهرة لها 6 أوجه وبالتالى فإن الزهرتان يمكن أن يظهرا معاً بعدد من الطرق قدرها 6 × 6 = 36 طريقة والحادث الحصول على مجموع : (2) يمكن أن نحصل عليه بطريقة واحدة (1 ، 1) أى يظهر على الزهرة الأولى (1) ، ويظهر على الزهرة الثانية (1) .

$\therefore$ ح = (الحصول على مجموع 2) = $\frac{1}{36}$

ح = (الحصول على مجموع 3) = $\frac{2}{36}$

لأن حادث الحصول على مجموع (3) هو (1 ، 2) ، (2 ، 1)

وبالمثل فإن

ح = (الحصول على مجموع 4) = $\frac{3}{36}$

ح = (الحصول على مجموع 1) = $\frac{2}{36}$

لأن حادث الحصول على مجموع 11 من الزهرتين هو (5 ، 6) ، (6 ، 5)

مثال : (18)

ما هو احتمال أن تسحب ورقة لعب تحمل رقم 5 من مجموعة كاملة من ورق اللعب .

الحل : عدد أوراق اللعب 52 ورقة .

عدد الأوراق التى تحمل رقم 5 = 4 ورقات .

$\therefore$ الاحتمال المطلوب = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

واحتمال الأوراق التى لا تحمل رقم 5 = $\frac{12}{13}$

= 1 – ح (تحمل الورقة رقم 5)

الاحتمالات المركبة Compound Probability

إذا تكونت تجربة من تجربتين بسيطتين أو أكثر فإنها تسمى تجربة مركبة والاحتمالات المتعلقة بها تسمى احتمالات مركبة . مثل إلقاء قطعتين من النقود معاً فهى تجربة مركبة وتتكون من التجربتين البسيطتين (رمى قطعة النقود الأولى ورمى القطعة الثانية) . وللتجربة الأولى نتيجتان صورة وكتابة ، وللتجربة الثانية نتيجتان صورة وكتابة أيضاً . فإذا رمزنا للصورة (ص) والكتابة بالرمز (ك) نجد أن التجربة المركبة تتكون من عدد من النتائج عددها = 2 × 2 = 4 نتائج وهى (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك).

- وإذا حاولنا إلقاء ثلاث قطع نقود فإن التجربة المركبة هنا تتكون من نتائج عددها $2 \times 2 X 2 = 2^3 = 8$

= (نتائج التجربة الواحدة)^عدد التجارب^

وهذه النتائج هى (ص ص ص) ، (ص ص ك) ، (ص ك ص) ، (ص ك ك) ، (ك ك ص) ، (ك ص ك) ، (ك ص ص) ، (ك ك ك)

- وعلى ذلك إذا كان لدينا التجربة ($أ_1$) التى لها نتائج عددها ($ن_1$) والتجربة ($أ_2$) التى لها نتائج عددها ($ن_2$) والتجربة ($أ_3$) التى لها نتائج عددها ($ن_3$) .

فإن التجربة المركبة ($أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$) لها نتائج عددها ($ن_1 \times ن_2 \times ن_3$) .

فالتجربة المركبة من إلقاء زهرتين من زهرة النرد معاً يكون لها نتائج عددها 6 × 6 = 36 والتجربة المركبة من إلقاء 3 زهرات معاً يكون لها نتائج عددها 6 × 6 × 6 = 216 .

مثال : (19)

إذا ألقيت زهرتين من زهر النرد معاً على سطح أملس فما هو احتمال الحصول على رقمين حاصل جمعهما 2 أو 8 أو 12 .

الحل : عدد النتائج الممكنة لإلقاء زهرتين نرد هى 6 × 6 = 36

وعدد النتائج التى يتكون منها الحادث (المطلوب) يساوى 7 نتائج هى

الزهرة الأولى :	1	2	3	4	5	6	6
الزهرة الثانية :	1	6	5	4	3	2	6

∴ ح (المطلوب) = $\frac{7}{36}$

قانون جمع الاحتمالات Addition Law

الحوادث المتنافرة أو المانعة أو الطاردة :

يقال للحدثين أ$_1$ ، أ$_2$ انهما متنافران أو مانعان أو طاردان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر . فعند إلقاء قطعة نقود فإما أن تظهر الصورة أو الكتابة ولا يمكن أن تظهر الصورة والكتابة معاً ولذلك فإن الحادث ظهور الصورة أو الحادث ظهور الكتابة مانعان لأن حدوث أحدهما يمنع وقوع الآخر . فعند إلقاء زهرة نرد على سطح أملس فإن الحادث (الحصول على رقم زوجى) والحادث (الحصول على رقم يقبل القسمة على 2) غير مانعين لأن وقوع الحادث الأول (الذى يتكون

من النتائج 2 ، 4 ، 6) لا يمنع الحادث الذى يتكون من النتيجتين (3، 6) إذ قد نحصل على الرقم 6 وهو رقم زوجى وفى نفس الوقت يقبل القسمة على3 .

جمع الاحتمالات للحوادث المانعة :

إذا كان أ$_1$ ، أ$_2$ حادثين مانعين فإن احتمال حدوث أ$_1$ و أ$_2$ يساوى مجموعة احتمال حدوث كل منهما على حدة أى أن ح (أ$_1$ أو أ$_2$) = ح (أ$_1$) + ح (أ$_2$) أو تكتب ح (أ$_1$ U أ$_2$) = ح (أ$_1$) + ح (أ$_2$) ومعنى أن أ$_1$ ، أ$_2$ حادثين مانعين أى لا يوجد عناصر مشتركة بينهما.

مثال : (20)

مجموعة من الكرات تتكون من 15 كرة تحمل أرقام من (1 إلى 15) فإذا سحبت منها كرة واحدة بطريقة عشوائية فما هو احتمال أن يكون الرقم المدون على الكرة يقبل القسمة على 4 أو يقبل القسمة على 7 .

الحل : الحادث (يقبل القسمة على 4) والحادث (يقبل القسمة على7) مانعين لأن الأول يتكون من النتائج (4 ، 8 ، 12) والثانى يتكون من النتائج (7 ، 14) ولا توجد نتيجة مشتركة بينهما أى لا يوجد فى المجموعة كلها رقم يقبل القسمة على 4 وفى نفس الوقت يقبل القسمة على 7 وبالتالى فإن ح (الرقم يقبل القسمة على 4 أو 7) = ح (يقبل القسمة على 4) + ح (يقبل القسمة على 7).

$$= \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

جمع الاحتمالات للحوادث غير المانعة :

إذا كان $أ_1$ ، $أ_2$ حادثين غير مانعين فإن

$$ح (أ_1 أو أ_2) = ح (أ_1) + ح (أ_2) - ح (أ_1 ، أ_2)$$

أو تكتب $ح (أ_1 \cup أ_2) = ح (أ_1) + ح (أ_2) - ح (أ_1 \cap أ_2)$

مثال : (21)

فى المثال السابق أوجد احتمال أن يكون الرقم المدون على الكرة يقبل القسمة على 3 أو 5 .

الحل :

الحادث يقبل القسمة على 3 يتكون من النتائج (15 , 12 , 9 , 6 , 3) والحادث يقبل القسمة على 5 يتكون من النتائج (5 , 10 , 15) والحادث يقبل القسمة على(3 , 5) يتكون من نتيجة واحدة وهى (15) .

ومن الواضح أن الحادث (يقبل القسمة على 3) والحادث (يقبل القسمة على5) غير مانعين وذلك لوجود نتيجة مشتركة بينهما وهى (15) حيث تقبل القسمة على (3 ، 5) وبالتالى فإن ح (تقبل القسمة على 3 أو 5) = ح (يقبل القسمة على 3) + ح (تقبل القسمة على 5) — ح (تقبل القسمة على 3 ، 5)

$$= \frac{5}{15} + \frac{3}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

قانون ضرب الاحتمالات :

الحوادث المستقلة :

يقال للحادثين $أ_1$ ، $أ_2$ أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر. فإذا ألقيت زهرة واحدة من زهر النرد على سطح أملس مرتين فإن حادث الحصول على رقم (5) فى المرة الأولى وحادث الحصول على رقم (5) فى المرة الثانية يعتبران حادثان مستقلان لأن الحصول على رقم (5) فى المرة الأولى لا يؤثر ولا يتأثر بالحصول على الرقم (5) فى المرة الثانية. وإذا سحبت ورقتان من أوراق الكوتشينة فإن الحادث الحصول على ولد بالكارت الأول والحادث الحصول على ولد بالكارت الثانى يعتبران حادثان غير مستقلان إذا كنا لا نعيد الكارت المسحوب إلى المجموعة قبل سحب الكارت الثانى لأن الحصول على ولد بالكارت الثانى سيتأثر بالحصول على ولد الكارت الأول لأن عدد الأولاد سيصبح 3 بدلاً من 4 وعدد أوراق اللعب سيصبح (51 بدلاً من 52) أما فى حالة رجوع الكارت الأول وخلط الورق جيداً قبل سحب الكارت الثانى يكون الحادثين الحصول على ولد بالكارت الأول والحصول على ولد بالكارت الثانى مستقلين .

ضرب الاحتمالات للحوادث المستقلة :

إذا كان $أ_1$ ، $أ_2$ حادثين مستقلين فإن احتمال وقوع كل من $أ_1$، $أ_2$ هو :

$ح(أ_1 ، أ_2) = ح(أ_1) \times ح(أ_2)$.

مثال : (22)

ألقيت زهرة واحدة من زهر النرد على سطح أملس مرتين أوجد احتمال الحصول على العدد (5) فى المرتين .

الحل :

احتمال الحصول على العدد (5) فى المرة الأولى =6/1 = ح (أ$_1$)

احتمال الحصول على العدد (5) فى المرة الثانية = 6/1 أيضا = ح (أ$_2$)

∴ ح (أ$_1$، أ$_2$) = ح (أ$_1$) × ح (أ$_2$) = 6/1 × 6/1 = 36/1

مثال : (23) سحب كارتان من مجموعة كاملة لورق اللعب تحتوى على 52 كارت وتحتوى على 4 أولاد و13 كارت من النوع السباتى فإذا كنا نعيد الكارت الأول ونخلط الورق جيداً قبل سحب الكارت الثانى فأوجد :

(1) احتمال أن يكون كل من الكارتين المسحوبين ولد.

(2) احتمال أن يكون كل من الكارتين المسحوبين سباتى.

الحل :

ح (سحب ولد) = 52/4 ، ح (سحب سباتى) = 52/13

ح (أ$_1$ ، أ$_2$) = ح (أ$_1$) × ح (أ$_2$)

ح (سحب ولدين) = $\frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$

ح (سحب ورقتين سباتى) = $\frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{169}$

ضرب الاحتمالات للحوادث غير المستقلة :

إذا سحبنا كارتاً واحداً بطريقة عشوائية من مجموعة كاملة لورق اللعب وتبيناه ولم نرجعه إلى المجموعة وسحبنا كارتاً آخر فإن احتمال أن يكون الكارت الثانى من النوع السباتى = 51/12 إذا كان الكارت الأول من النوع السباتى، ويساوى 15/13 إذا كان الكارت الأول ليس من النوع السباتى ومن ذلك نتبين أن معرفتنا لنوع الكارت الأول تؤثر على حساب الاحتمال للكارت الثانى. وعموماً إذا كان لدينا حادثين غير مستقلين $أ_1$ ، $أ_2$ فإن احتمال وقوعهما معاً يحتوى على احتمال شرطى Conditional Probability حسب العلاقة :

ح ($أ_1$ ، $أ_2$) = ح ($أ_1$) × ح ($أ_2$ / $أ_1$)

حيث ح ($أ_2$ / $أ_1$) تسمى بالاحتمال الشرطى وتعنى احتمال وقوع $أ_2$ مع العلم بأن $أ_1$ قد وقع .

مثال : (24) احسب المطلوب فى المثال السابق بفرض عدم إعادة الكارت الأول قبل سحب الكارت الثانى.

الحل: ح (سحب ولد) فى المرة الأولى = 52/4

ح (سحب ولد) فى المرة الثانية = 51/3

ح (سحب سباتى) فى المرة الأولى = 52/13

ح (سحب سباتى) فى المرة الثانية = 51/12

ح ($أ_1$ ، $أ_2$) = ح ($أ_1$) × ح ($أ_2$ / $أ_1$)

ح (سحب ولدين) = $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$

ح (سحب كارتين سباتى) = $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$

تمارين

1) يحتوى صندوق على 20 كرة حمراء ، 30 كرة بيضاء ، 20 كرة زرقاء ، 15 كرة سوداء ، أحسب الاحتمالات الآتية:

أ - احتمال أن تسحب كرة واحدة سوداء أو حمراء .

ب - احتمال تكون الكرة المسحوبة حمراء أو زرقاء .

ج - احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة حمراء أو زرقاء .

د - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء .

هـ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو زرقاء .

2) احسب احتمال سحب ثلاثة أوراق بها صورة بنت من مجموعة كاملة من ورق اللعب (السحب بإرجاع مرة وبدون إرجاع مرة أخرى)

3) مخزن (أ) به60 وحدة جيدة ، 40 وحدة رديئة ، ومخزن (ب) به 80 وحدة جيدة، 20 وحدة رديئة ومخزن (ج) به 50 وحدة جيدة و50 وحدة رديئة فإذا سحبنا وحدة واحدة من كل مخزن . احسب الآتى :

(أ) احتمال أن تكون الثلاث وحدات جيده .

(ب) احتمال أن تكون الثلاث وحدات رديئة .

(ج) احتمال أن تكون الأولى جيدة والثانية والثالثة رديئة .

(د) احتمال أن تكون الأولى والثالثة جيده والثانية رديئة .

4) إذا كان احتمال الحياة للزوج مدة عشر سنوات بعد اليوم = 7/1 واحتمال حياة الزوجة مدة عشر سنوات بعد اليوم = 9/1 احسب الاحتمالات الآتية :

1- احتمال أن يعيشا سويا مدة عشر سنوات .

2- احتمال أن يتوفيا سوياً خلال هذه المدة .

3- احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة .

4- احتمال أن يتوفى الزوج وتعيش الزوجة .

5) إذا كان احتمال نجاح الطالب فى مادة الاقتصاد هو 5. واحتمال نجاحه فى مادتى الاقتصاد والرياضة سوياً 0.45 وإذا كان نجاحه فى مادة واحدة على الأقل فى هاتين المادتين هو 0.80 احسب احتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة .

6) إذا كان احتمال توزيع مذكرة الرياضة هو 0.8 واحتمال توزيع مذكرة الاقتصاد هو 0.9 احسب احتمال توزيع أحدهما على الأقل .

7) عند إلقاء ثلاث قطع نقود متزنة مرة واحدة أوجد احتمال أن تكون الأوجه الثلاثة متشابهة أو أن تظهر الصورة على وجهين على الأقل ، ثم أوجد احتمال أن تكون الأوجه الثلاثة متشابهة أو أن تظهر الصورة على وجهين فقط.

8) صندوق به 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10 إذا سحبنا كرة عشوائياً من هذه الكرات من هذا الصندوق فأوجد ما يلى :

1- احتمال أن يكون على الكرة رقماً زوجياً أو أقل من أو يساوى5 .

2- احتمال أن يكون على الكرة رقماً 3 أو أكبر من 6 .

9) كيس به 20 كرة منها 7 حمراء ، 8 بيضاء ، 5 صفراء سحبت 3 كرات عشوائياً من هذا الكيس أوجد احتمال أن تكون الأولى صفراء والثانية حمراء والثالثة بيضاء إذا كان :

أولاً : السحب بإرجاع .

ثانياً : السحب بدون إرجاع .

10) من التمرين السابق أوجد احتمال أن تكون الكرات الثلاثة حمراء إذا كان السحب بإرجاع مرة وبدون إرجاع مرة أخرى .

أولا : توزيع ذو الحدين :

إذا كان $ل_1$ تمثل احتمال حدوث حدث معين فى محاولة واحدة فيقال إنه احتمال النجاح وبالتالى يكون $ل_2 = 1 - ل_1$ هو احتمال الفشل . فإذا فرض أن احتمال حدوث حدث معين (س) مرة فى عدد من المحاولات مقداره (ن) محولة فإن هناك (س) محاولة تمثل عنصر النجاح ، (ن – س) تمثل الفشل وتعطى بالمعادلة التالية :

$$ح (س) = \binom{ن}{س} (ل_1)^{س} (ل_2)^{ن - س}$$

$$= \frac{ن !}{(ن - س) ! \; س !} (ل_1)^{س} (ل_2)^{ن - س}$$

فمثلاً احتمال الحصول على الصورة فى رمى قطعة نقود من الممكن التعبير عنه بالرموز (ص) وبالتالى فإن احتمال الحصول على الكتابة = 1 – ص = ك أو 1 – ح (ص) = ح (ك) .

فعند رمى ثلاث قطع نقود مرة واحدة فإنه من الممكن الحصول على أى من التوافيق الممكنة لكل من الصورة والكتابة كما يلى :

الحالة	الاحتمال	
ص ص ص	8/1	($ص^3$)
ص ص ك	8/1	($ص^2$ ك)
ص ك ص	8/1	($ص^2$ ك)
ك ص ص	8/1	($ص^2$ ك)
ص ك ك	8/1	(ص $ك^2$)
ك ص ك	8/1	(ص $ك^2$)
ك ك ص	8/1	(ص $ك^2$)
ك ك ك	8/1	($ك^3$)

وهكذا يكون لدينا مجموعة من الأحداث مستبعدة لحدوثها البعض وحيث أن مجموع الاحتمالات الكلية لأى تجربة يساوى الواحد الصحيح فإن :

$$ح\ (ص^3 + 3\ ص^2\ ك + 3\ ص\ ك^2 + ك^3) = 1$$

والجزء الأيمن من المعادلة هو عبارة عن مفكوك ذات الحدين $(ص + ك)^3$ وتوزيع النتائج يطلق عليه توزيع ذو حدين وهو عبارة عن توزيع احتمال متقطع .

مثال : (25)

إذا كانت فرصة فوز المنافس لمباراة ما هى (0.6) إذا تم اللعب 4 مباريات فما هو احتمال أن يكسب صفر ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، من المباريات على الترتيب.

الحل :

احتمـال الفـوز هـو (0.6) وبالتـالي فـإن احتمـال الخسـارة يكـون $1 - 0.6 = 0.4$ وبالتــالي نحصــل علــى كــل الاحتمــالات الممكنــة بمفكوك ذات الحدين .

$$(0.4+0.6)^4 = (0.6)^4 + \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}(0.6)^3(0.4) + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}(0.6)^2(0.4)^2 + \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}(0.6)(0.4)^3 + (0.4)^4$$

$$= (0.6)^4 + 4(0.6)^3(0.4) + 6(0.6)^2(0.4)^2 + 4(0.6)(0.4)^3 + (0.4)^4$$

ممـا سـبق يتضـح أن توزيـع ذو الحـدين يسـتعمل أساسـاً كتوزيـع للمتغيرات المتقطعة والتي تحدث في صورتين فقط مثل الحصول على وجه أو ظهـر مـن رمـى قطعـة نقـود معدنيـة أو إنجـاب ذكـر أو أنثـى أو وصـول البيض سليم أو فاسد أو نباتات مصابة أو سليمة ونجـد أن كـل مـن ل$_1$ ، ل$_2$ همـا الاحتمـال البسـيط للنجـاح والفشـل وكـل منهـا كسـر موجـب ومجموعها يساوى الواحد الصحيح .

توزيع ذو الحدين عندما يكون ل$_1$ = ل$_2$ = 2/1 :

مثال : (26)

في عائلة مكونة من 6 أطفال ما هى الاحتمالات المختلفة لجنس هؤلاء الأطفال .

الحل :

في الواقع أن هناك عديد من الاحتمالات الممكنة لهؤلاء الستة أطفال يمكن توضيحها في التالي :

	ذكــر	أنثــى
احتمال	6	-
احتمال	5	1
احتمال	4	2
احتمال	3	3
احتمال	2	4
احتمال	1	5
احتمال	-	6

ومن هنا نجد أن عدد الاحتمالات الكلية الممكنة يزيد واحد عن عدد الأفراد وحيث أن عدد الأطفال 6 وعدد الاحتمالات 7 ومقابل لكل توفيق من القوانين السابقة احتمال نظري أو رياضي من الممكن الحصول عليه من مفكوك المعادلة $(ل_1+ل_2)^ن$ حيث أن $ل_1$ هو احتمال الحصول على ذكر ويساوى ½ ، $ل_2$ هو احتمال الحصول على أنثى ويساوى ½ وبذلك تصبح المعادلة العامة هى $(½ + ½)^6$ ومفكوكها يعطى جميع الاحتمالات للسبعة أحداث السابقة .

$$(½ + ½)^6 = (½)^6 + 6\,(½)^5\,(½) + 15\,(½)^4\,(½)^2 + 20\,(½)^3\,(½)^3 + 15\,(½)^2\,(½)^4 + 6\,(½)\,(½)^5 + (½)^6 .$$

ولاستخراج قيمة الاحتمال الخاصة بالحصول على ستة أطفال ذكور هو مفكوك الحد الأول من مفكوك ذات الحدين $(½ + ½)^6$.

ولتوضيح ذلك نضع جميع الاحتمالات في الشكل التالي :

1- ح (ستة أطفال ذكور) $(½)^6$ = 0.015625

2- ح (خمسة أطفال ذكور وأنثى واحدة) $6\ (½)^5\ (½)$

= 0.093750

3- ح (أربعة ذكور وأنثتان) $15\ (½)^4\ (½)^2$ = 0.234375

4- ح (ثلاثة أطفال ذكور وثلاثة إناث) $20\ (½)^3\ (½)^3$ = 0.312500

5- ح (طفلان ذكور وأربعة إناث) $15\ (½)^2\ (½)^4$ = 0.234375

6- ح (طفل ذكر وخمسة إناث) $6\ (½)\ (½)^5$ = 0.093750

7- ح (الأطفال الستة إناث) $(½)^6$ = 0.015625

مجموع الاحتمالات = 1.000000

توزيع ذو الحدين عندما $ل_1 \neq ل_2 \neq 2/1$ ولكن مجموعهما يساوى الواحد الصحيح:

مثال : (27)

فى أحد حقول القطن وجد أن معدل الإصابة بمرض الذبول الفيوزارمى للبادرات هو 30٪ فإذا فحصت 6 بادرات فما هى الاحتمالات المختلفة للإصابة من عدمها بالنسبة لهذه البادرات الستة .

الحل :

من الممكن التعبير رياضياً عن قيمة الاحتمالات المختلفة للأحداث على أساس مفكوك ذات الحدين حيث يكون احتمال الإصابة30٪ واحتمال عدم الإصابة 70٪ ويعبر بمفكوك المعادلة :

$$(0.7 + 0.3)^6 = (0.3)^6 + 6\,(0.3)^5\,(0.7) + 15\,(0.3)^4\,(0.7)^2 + 20\,(0.3)^3$$

$$(0.7)^3 + 15\,(0.7)^2\,(0.7)^4 + 6\,(0.3)\,(0.7)^5 + (0.7)^6$$

ويعبر عن جميع الاحتمالات فى صورة الجدول التالى :

الاحتمال

1- احتمال أن تكون الستة نباتات مصابة $(0.3)^6 = 0.0008$

2- احتمال أن تكون خمسة مصابة وواحدة سليمة $6\,(0.3)^5\,(0.7)$
$= 0.0105$

3- احتمال أن تكون أربعة مصابة و2 سليمة $15\,(0.3)^4\,(0.7)^2$
$= 0.05094$

4- احتمال أن تكون 3 مصابة و 3 سليمة $20\,(0.3)^3\,(0.7)^3$
$= 0.1852$

5- احتمال أن تكون 2 مصابة و 4 سليمة $15\,(0.3)^2\,(0.7)^4$
$= 0.3241$

6- احتمال أن تكون واحدة مصابة وخمسة سليمة $6\,(0.3)\,(0.7)^5$
$= 0.3025$

7- احتمال أن تكون 6 نباتات سليمة $(0.7)^6 = 0.1175$

مجموع الاحتمالات $= 1.0000$

مثال : (28)

من المثال السابق ما هو احتمال الحصول على ثلاث نباتات مصابة وثلاثة سليمة .

الحل : فى هذه الحالة يجب معرفة ترتيب الحد الذى يحتوى على 3 مصابة و 3 سليمة فنجده الحد الرابع أى إذا كان المطلوب هو إيجاد مفكوك الحد الرابع من مفكوك $(0.3 + 0.7)^6$

$$ح_{ر+1} = \binom{6}{3}(0.3)^3(0.7)^3 = 0.1852$$

مثال : (29)

من المثال قبل السابق أوجد احتمال الحصول على 3 نباتات مصابة على الأقل .

الحل : فى هذه الطريقة قد تكون 3 مصابة أو 4 مصابة أو 5 مصابة أو 6 مصابة أى الاحتمال المطلوب يكون على صورة الحدود .

$$\binom{6}{3}(0.3)^3(0.7)^3 + \binom{6}{2}(0.3)^4(0.7)^2 + \binom{6}{1}(0.3)^5(0.7) + (0.3)^6$$

$$= 0.1852 + 0.0594 + 0.0105 + 0.0008 = 0.2559$$

حيث الأس الذى يعلو الرقم (0.3) يدل على عدد النباتات المصابة من إجمالى عدد البادرات وهو 6 وبالتالى إذا كان الأس هو 3 مثلاً فإن عدد النباتات السليمة المتممة للـ 6 هو 3 وكذلك إذا كان هو 4 فإن عدد النباتات السليمة يكون 2 وهكذا وحيث القانون يكون على الصورة :

$\binom{ن}{ر}$ س$^{ن-ر}$ ص^{ر} حيث

ن تدل على إجمالى عدد النباتات السليمة والمصابة معاً .

ن- ر تمثل عدد النباتات المصابة .

ر تمثل عدد النباتات السليمة .

مثال : (30)

من المثال السابق ما هو احتمال الحصول على 3 نباتات مصابة على الأكثر .

الحل : فى هذه الحالة قد تكون 3 مصابة (والباقى سليم) أو 2 مصابة (والباقى سليم) أو واحدة مصابة (والباقى سليم) أو الكل سليم .

الاحتمال المطلوب= $\binom{6}{3}(0.3)^3(0.7)^3 + \binom{6}{4}(0.3)^4(0.7)^4 + \binom{6}{5}$

$(0.7) + 5(0.7)(0.3)$

$= 0.1852 + 41.32 + 0.3025 + 0.1175 = 0.9293$

خواص توزيع ذو الحدين :

(1) المتوسط = μ = ن ل$_1$

(2) التباين = σ^2 = ن ل$_1$ ل$_2$

(3) انحراف المعيارى = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{\text{ن ل}_1\text{ ل}_2}$

(4) معامل العزوم للالتواء = $\frac{ل_2 - ل_1}{\sqrt{ن ل_1 ل_2}}$

(5) معامل العزوم للتفرط ح = 3 + $\frac{ل_2 - 6 ل_1 ل_2}{ن ل_1 ل_2}$

حيث ن هو عدد التجارب أو عدد النتائج أو ....

$ل_1$ هو احتمال النجاح ، $ل_2$ هو احتمال الفشل حيث $ل_1 + ل_2 = 1$

مثال : (31)

فى عائلة مكونة من خمسة أطفال المطلوب استخراج المتوسط والتباين للمتغير (ذ) وهو عدد الذكور.

الحل :

المتوسط μ = ن $ل_1$ = 5 × ½ = 2.5

التباين σ^2 = ن $ل_1$ $ل_2$ = 5 × ½ × ½ = 1.25

ثانيا : توزيع بواسون Poisson Distribution

هذا التوزيع عبارة عن حالة من حالات توزيع ذو الحدين ويستعمل عندما يكون احتمال واقعة ما صغيرة جداً وعدد أفراد المجموعة كبير جداً . ويفيد هذا التوزيع فى الحالات التى لا يعرف فيها عدد الأفراد N والتوزيع تمثله العلاقة التاليه :

$$P(x) = \frac{e^{-u} \, u^{x}}{x\,!}$$

حيث U وهو عبارة عن ثابت إحصائى معين وهى قيمة نظرية تمثل متوسط X .

e رقم ثابت = 2.718

x = 1 ، 2 ، 3 ، .... حيث x متغير متقطع

مثال : (32)

إذا كان متوسط عدد الأيام غزيرة الأمطار خلال فصل الشتاء فى أحد مدن الجماهيرية هو 4 أيام فى السنة فما هو احتمال سقوط الأمطار الغزيرة فى هذه المدينة لمدة 6 أيام خلال فصل الشتاء .

الحل :

باستعمال توزيع بواسون فإن قيمة $X = 6$ ، $U = 4$

$$P(X) = \frac{e^{-4}\, 4^{6}}{6!} = 0.1040$$

وهناك جداول خاصة بهذا التوزيع عن الاحتمالات الممكنة لبعض القيم .

ثالثاً : التوزيع الطبيعى Normal Distribution

يعتبر من أكبر التوزيعات التى تمت دراستها فى الإحصاء . كما أنه يعتبر من أهم التوزيعات التى تختص بالمتغيرات المستمرة . وهو يقابل توزيع ذو الحدين للمتغيرات المتقطعة وفى حالة $ل_1 = ل_2 = 0.5$ وتكون (ن) كبيرة .

خصائص التوزيع الطبيعى :

(1) التوزيع الطبيعى عبارة عن توزيع مستمر يختلف عن كل من توزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون حيث يختصان بالمتغيرات المتقطعة .

(2) يمكن التعبير عنه بالعلاقة الآتية :

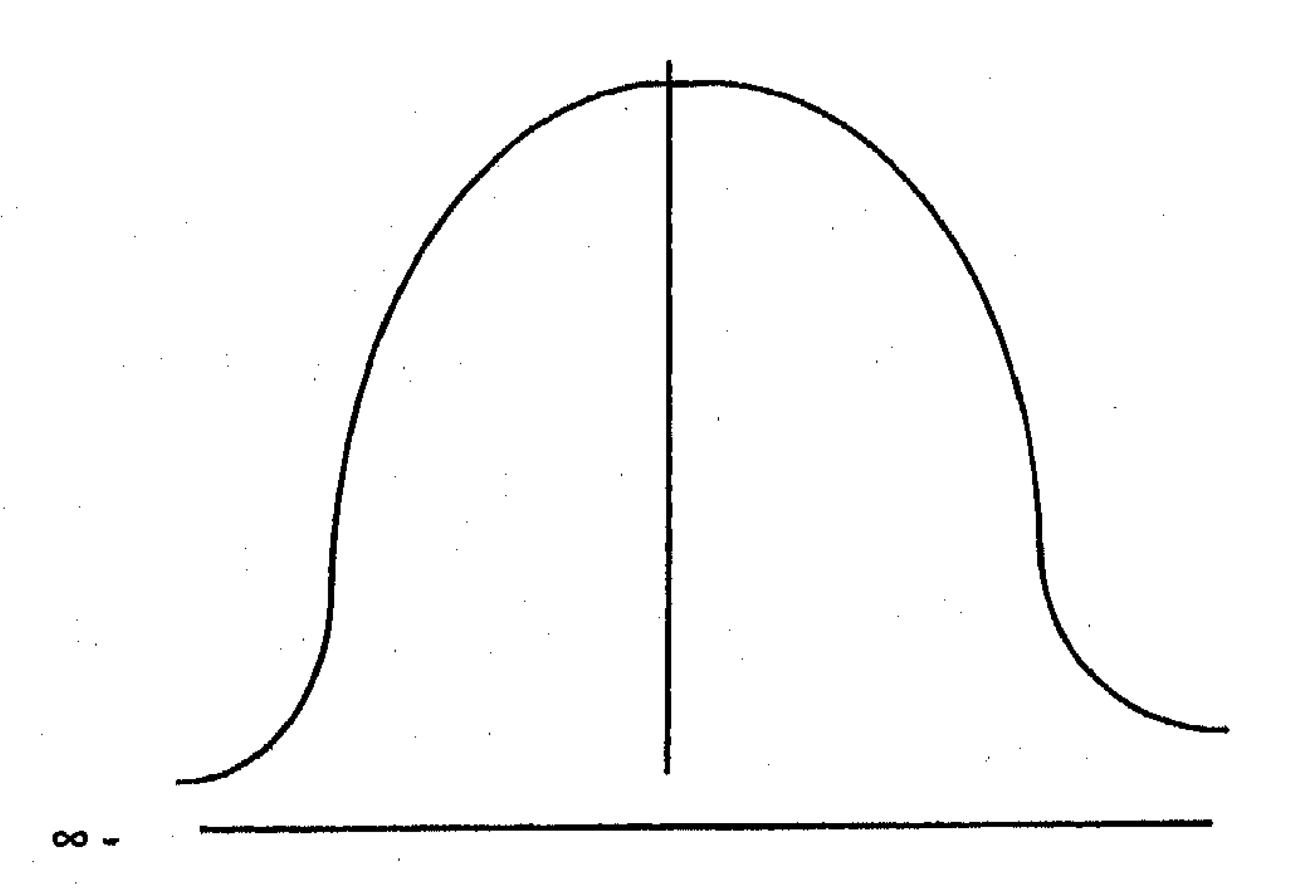
$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \bar{e}\ ½ \ \left(\frac{x-u}{\sigma}\right)^2 \qquad ....(A)$$

حيث

σ = الانحراف المعيارى $\qquad e = 2.718$

μ = المتوسط $\qquad \pi = 3.14 \qquad 00 \geq x \geq -00$

والمنحنى الممثل للمعادلة (A) يسمى منحنى التوزيع الطبيعى وهو ناقوس الشكل ومتماثل من الجانبين وهذا المنحنى يوضح العلاقة بين قيم X والتكرار Y



وهناك معادلات خاصة يمكن من خلالها إيجاد المساحات الجزئية المختلفة تحت أى منحنى طبيعى بقيمة كل من μ وσ^2 وفى هذه الحالة يتطلب الأمر تطبيق معادلات معقدة لاستخراج هذه المساحات. وللتسهيل فإن الإحصائيين استنبطوا ما يطلق عليه منحنى التوزيع الطبيعى القياسى والتى يمكن لأى قيم تتوزع طبيعياً أن تنطبق على هذا التوزيع.

المنحنى الطبيعى القياسى Standard Normal Curve

إستنبط الإحصائيون جداول إحصائية توضح المساحات تحت المنحنى لأجزاء تنحصر بين المتوسط الحسابى وقيمة X (قيمة z) فى صورة احتمال لعشيرة تتوزع طبيعياً بمتوسط حسابى قدره صفر وانحراف قياسى يساوى 1 . ويطلق على هذا المنحنى المعبر عن هذه العشيرة باسم المنحنى الطبيعى القياسى . ويتطلب منا ذلك تحويل جميع قيم (X) إلى ما يقابلها من قيم (z) وهى قيم المتغير للمنحنى الطبيعى القياسى .

حيث X هى المفردات ، μ هى المتوسط الحسابى ، σ هى الانحراف المعيارى والمعادلة العامة للمنحنى الطبيعى القياسى هى :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

$$z = \frac{x - u}{\sigma}$$

ومن خصائص التوزيع الطبيعى القياسى :

(1) وسطه الحسابى = صفر

(2) الانحراف المعيارى = 1

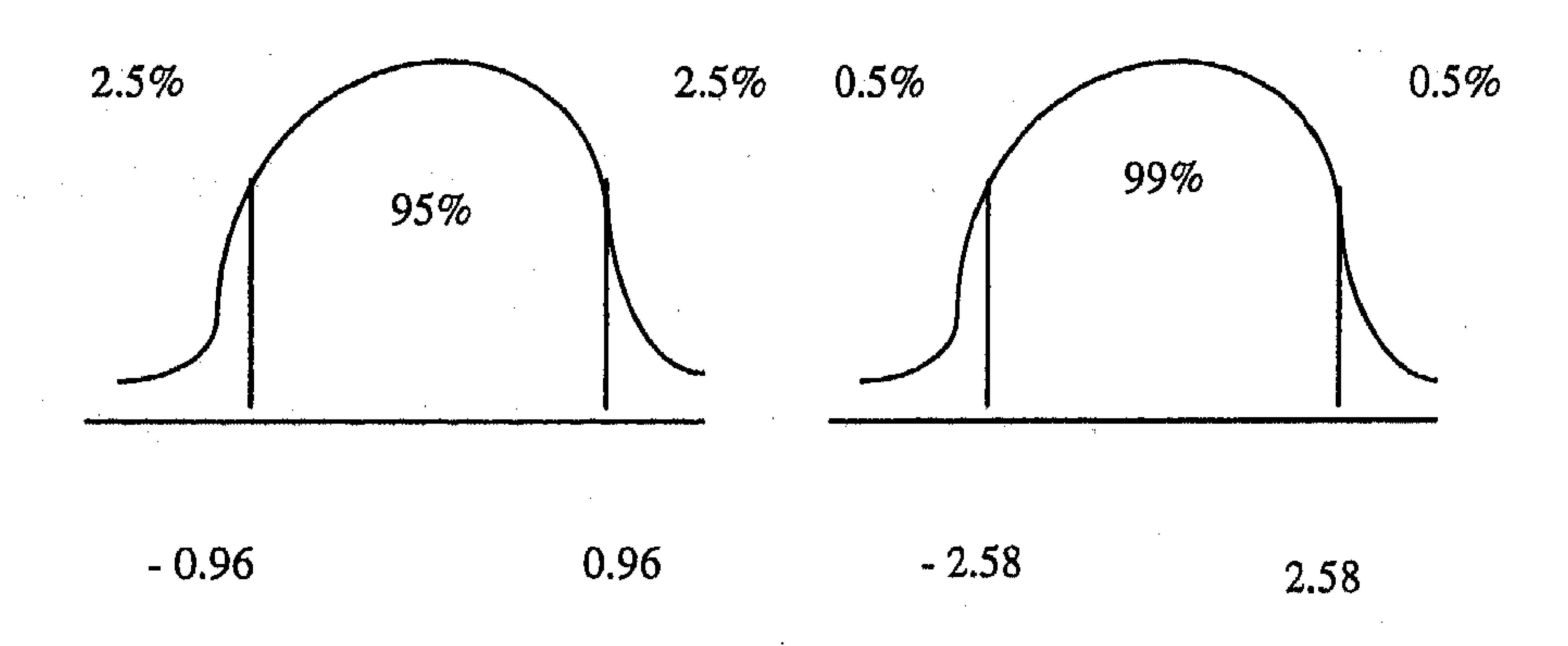
(3) احتمال أن تقع Z بين ± 1.96 يساوى 0.95 أى

$$P(1.96 \geq z \geq -1.96) = 0.95$$

كذلك احتمال أن تقع Z بين ± 2.58 يساوى 0.99 أى

$$P(2.58 \geq z \geq -2.58) = 0.99$$

ومعنى ذلك أن 95 ٪ من المساحة تحت المنحنى تقع بين (Z = 1.96 ، Z = –1.96) وأن 99٪ من المساحة تحت المنحنى تقع بين (Z = 2.58 ، Z = –2.580) كما يتضح من الشكل :



(4) توجد جداول للمنحنى الطبيعى القياسى تعطى قيم Ø (Z) بالنسبة لقيم Z الموجبة أما بالنسبة لقيم z السالبة فتستخدم الخاصية رقم (6) التالية :

(5) يمكن تحويل متغير عشوائى (X) له توزيع معتدل وسطه الحسابى μ وانحرافه المعيارى σ إلى متغير طبيعى قياسى وذلك بوضع

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

(6) نظراً لتماثل منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المعتدل المعيارى فإن

$$\varnothing(-a) = 1 - \varnothing(a)$$

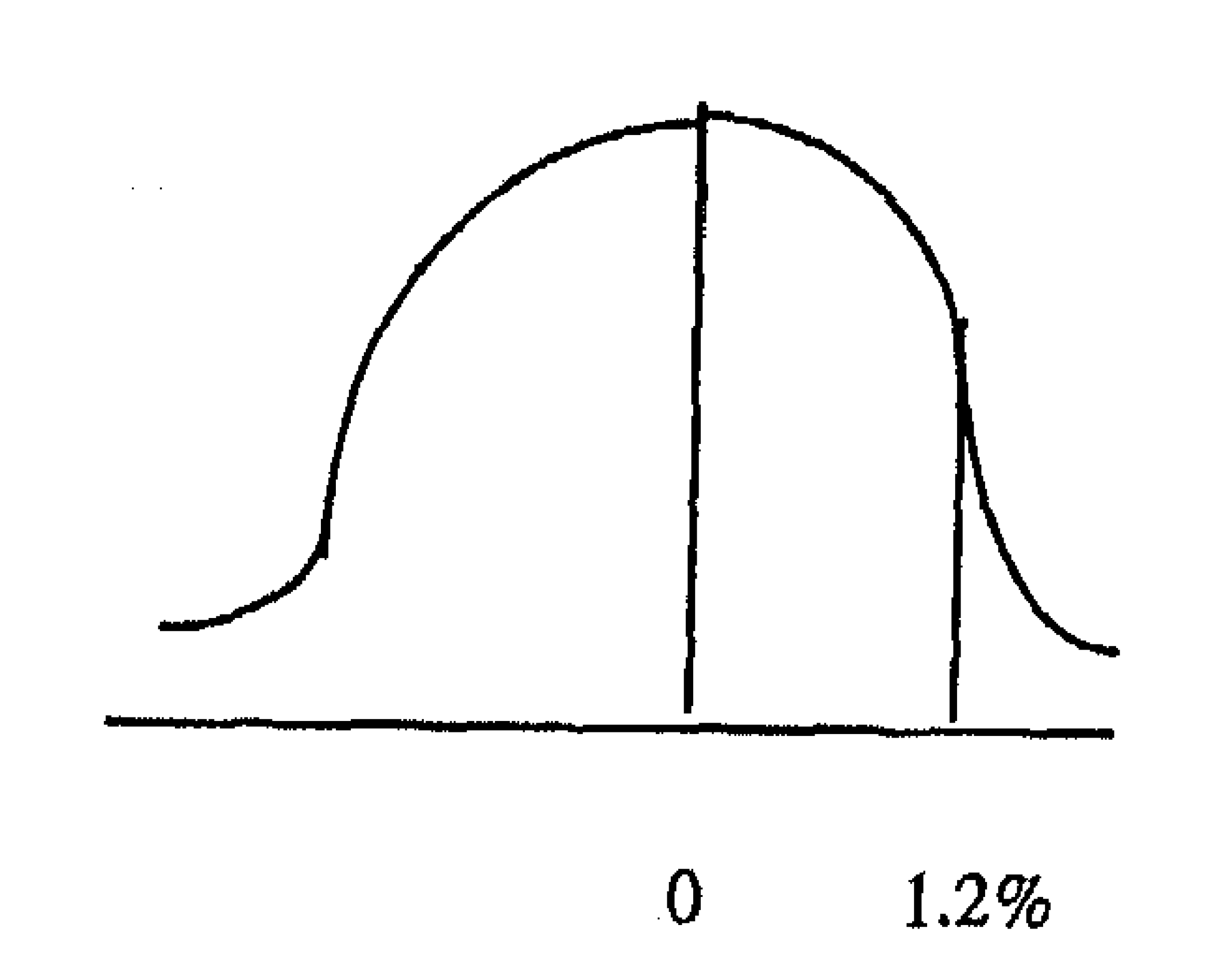
(7) المساحة تحت المنحنى لا تزيد عن الواحد الصحيح .

مثال : (33)

أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى القياسى فى كلا من الحالتين الآتية

بين Z = صفر ، Z = 1.2

الحل :



من الجدول يتضح أن المساحة تساوى 0.3849

وحصلنا على هذا الرقم من خلال الكشف فى جدول Z

أمام 1.2 تحت الصفر فوجد أنها 0.8849

∴ المساحة المطلوبة = 0.8849 - 0.5000 = 0.3849

مثال : (34)

متوسط أوزان 500 طالب فى أحد الكليات هو 151كجم والانحراف القياسى 15كجم وبفرض أن الأوزان تتوزع طبيعياً أوجد عدد الطلبة الذين ينحصر وزنهم بين :

(أ) 1119.5 – 155.5 كجم

(ب) أكبر من 185.5 كجم

الحل :

لإيجاد عدد الأفراد الذين ينحصر وزنهم بين 119.5 – 155.5 كجم يتطلب ذلك تحويل هاتين القيمتين إلى ما يقابلهما من وحدات معيارية (Z)

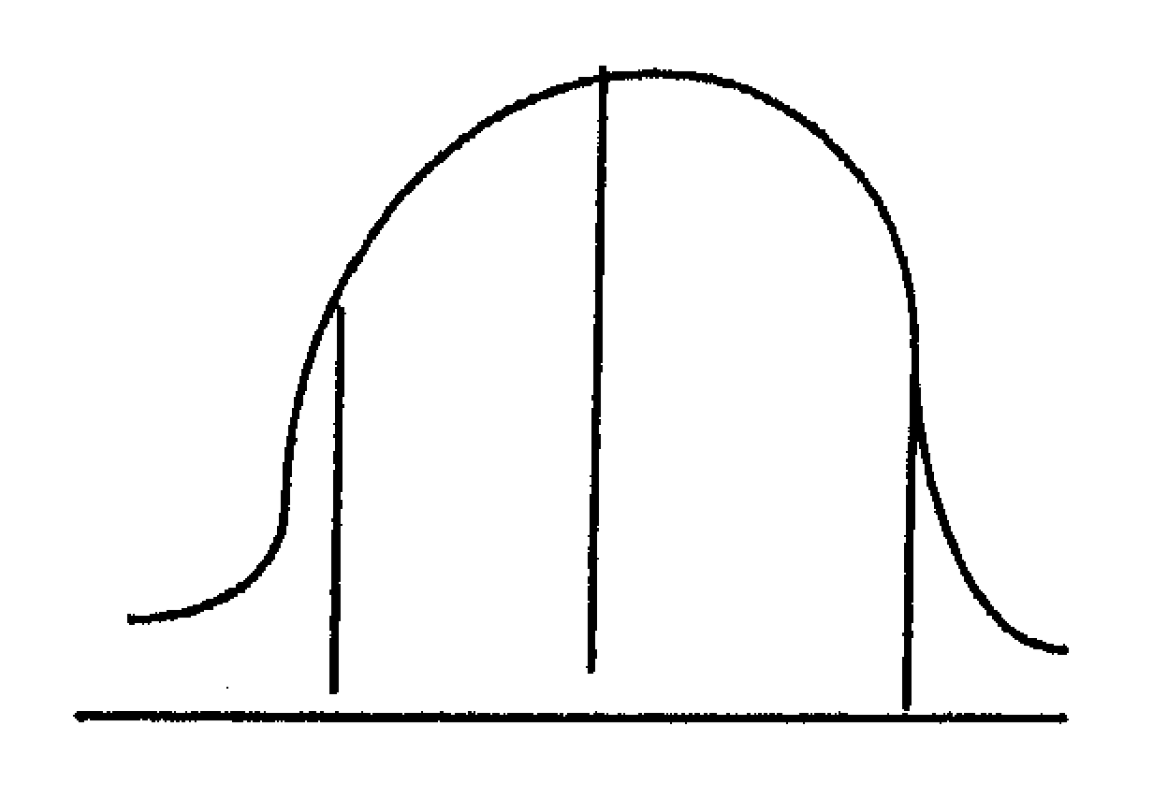
(أ) باستعمال المعادلة

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z_1 = \frac{119.5 - 151}{15} = -2.1$$

$$Z_2 = \frac{155.5 - 151}{15} = 0.3$$

نسبة الطلبة المطلوبة هى المساحة بين $Z = -2.1$, $Z = 0.3$



ويمكن التعبير عن ذلك بالمساحات

Z = - 2.1 إلى الصفر

Z = صفر إلى 0.3

ومن الجدول فإن المساحة الكلية هى 0.4821 + 0.1179 = 0.6

∴ عدد الطلبة الذين تقع أوزانهم بين 119.5 – 155.2 كجم

هى = 500 × 0.6 = 300 طالب .

(ب) عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185.5 كجم

$$Z = \frac{185.5 - 151}{15} = 2.3$$

ويمكن التعبير عن ذلك بالمساحة من z = 2.3 إلى الصفر ومن الجدول فهى تساوى 4892. بينما المطلوب هو عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185.5 كجم أى الذى يزيدون عن قيمة المساحة بين z = صفر إلى z = 2.3

∴ المساحة = 1 – 0.98928 = 0.01072

∴ عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185.5 كجم =

200 × 0.01072 = 2 طالبا تقريباً

ملحوظة : حيث أن عدد الطلبة الذين ينحصر وزنهم بين 119.5 – 155.5 يساوى 300 طالب وبالتالى فإن عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185.5 كجم يكون بين الـ 200 طالب الباقين من المجموع الكلى وهو 500 طالب .

تمارين

1- إذا كان احتمال ولادة الذكر = 0.5 احسب جميع الاحتمالات الخاصة بأسرة لديها 4 أطفال ، ثم احسب احتمال 3 أطفال إناث على الأقل .

2- إذا كانت نسبة النجاح فى مادة الرياضة لطلبة الفرق الأولى بكلية الزراعة سبا باشا هو 0.9 قدر احتمال أن خمسة من الطلبة يكونوا :

(أ) الكل ناجح (ب) على الأقل واحد ناجح

(ج) اثنان راسبان على الأكثر .

3- احتمال إنتاج وحدة معيبة فى إنتاج آلة معينة يساوى 0.02 فأوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع الوحدات المعيبة فى مجموعة من 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة .

4- أحد المصانع ينتج مصابيح كهربائية نسبة العيوب فيها 30٪ احسب احتمال أن يكون بعبوة مكونة من 100 مصباح .

(أ) صفر أو واحد أو اثنان معيوبة (ب) أكثر من 5 معيوبة

5- إذا كان احتمال إنتاج وحدة معينة من إنتاج آلة معينة يساوى 02. فأوجد احتمال أن تشتمل عينة مكونة من 100 من إنتاج هذه الآلة على .

(أ) أربعة وحدات معيبة (ب) وحدة واحدة معيبة على الأقل .

(استخدم توزيع بواسون)

أمثلة متنوعة على الاحتمالات

مثال : (1)

ما هو احتمال أن تسحب ورقة لعب من مجموعة كاملة من ورق اللعب تحمل رقم 8 وما هو احتمال الأوراق التى لا تحمل رقم 8 .

الحل :

عدد أوراق اللعب = 52 ورقة

عدد الأوراق التى تحمل رقم 8 = 4 ورقات

∴ احتمال أن تسحب ورقة لعب تحمل رقم 8 = $\frac{4}{52}$

احتمال أن الأوراق المسحوبة لا تحمل رقم 8 = 1 − ل (ورقة تحمل رقم 8)

$$= 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52}$$

مثال : (2)

أوجد عدد طرق سحب ورقتين من مجموعة كاملة من ورق اللعب

الحل:

عدد أوراق المجموعة الكاملة من ورق اللعب = 52

∴ عدد طرق اختيار ورقتان من 52 ورقة = ^{52}ق$_{2}$ = $\frac{52\,!}{2\,!\,52\,!}$

$$\frac{51 \times 52}{1 \times 2} = 1326 \text{ طريقة}$$

مثال : (3)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة كازابلانكا

الحل

عدد الأحرف الكلية للكلمة = 10 أحرف

عدد الأحرف المتشابهة = 4 أحرف متشابهة لحرف أ

عدد الطرق المطلوبة = $\frac{!10}{!4} = \frac{!4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{!4}$

= 151200 طريقة

مثال : (4)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة زراعة

الحل :

يلاحظ أن عدد حروف هذه الكلمة هى 5 أحرف وليست بينها أحرف متشابهة .

∴ عدد الطرق المطلوبة = 5 ! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120 طريقة

مثال : (5)

بكم طريقة يمكن جلوس 4 فتيات فى صف مستقيم

الحل :

عدد الطرق = 4 ! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24 طريقة

مثال : (6)

بكم طريقة يمكن غرس 5 أشجار دائرياً حول منزل .

الحل :

عدد الطرق = (5 – 1) ! = 4 ! = 24 طريقة .

مثال : (7)

ألقيت ثلاث زهرات نرد احسب احتمال الحصول على مجموع10.

الحل : المجموع 10 يمكن الحصول علية من جمع الآتى :

الزهرة الأولى	الزهرة الثانية	الزهرة الثالثة	المجموع	الطريقة
6	3	1	10	(1)
6	2	2	10	(2)
5	4	1	10	(3)
5	3	2	10	(4)
4	3	3	10	(5)
4	4	2	10	(6)

الطريقة الأولى :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب 3 ! = 3 × 2 × 1 = 6

(لأنه لا توجد أرقام متشابهة على الثلاث زهرات)

الطريقة الثانية :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب = $\frac{3!}{2!} = 3$

(لأنه يوجد رقمين متشابهين وهما 2 ، 2 ولذلك قسمنا على 2 !)

الطريقة الثالثة :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب = 3 ! = 6

الطريقة الرابعة :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب = 3 ! = 6

الطريقة الخامسة :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب = $\frac{3!}{2!} = 3$

الطريقة السادسة :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب = $\frac{3!}{2!} = 3$

ومن ذلك يتضح أن عدد الطرق التى يمكن الحصول بها على مجموع = 10 هى :

6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27 طريقة

عدد الأحداث الكلية لتجربة إلقاء ثلاث زهرات

= 6 × 6 × 6 = 216 حدث

∴ احتمال الحصول على مجموع 10 = $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$

مثال : (8)

صندوق يحتوى على 20 كرة حمراء ، 60 كرة بيضاء ، 40 كرة زرقاء ، 30 كرة سوداء أوجد :

أ – احتمال أن تسحب كرة واحدة حمراء أو بيضاء

ب- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست حمراء أو بيضاء

ج- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء

د – احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

هـ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

الحل : يلاحظ أن إجمالى عدد الكور التى بالصندوق = 150 كرة

ل (سحب كرة حمراء) = $\frac{20}{150}$

ل (سحب كرة بيضاء) = $\frac{20}{150}$

ل (سحب كرة زرقاء) = $\frac{20}{150}$

ل (سحب كرة سوداء) = $\frac{20}{150}$

أ – احتمال أن تسحب كرة واحدة حمراء أو بيضاء

$$= \frac{20}{150} + \frac{60}{150} = \frac{80}{150}$$

ب- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير حمراء أو بيضاء

$$= 1 - \frac{80}{150} = \frac{70}{150}$$

(لأن احتمال وقوع حدث معين + احتمال عدم وقوع هذا الحدث المعين = 1)

ج- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير زرقاء

$$= 1 - \frac{40}{150} = \frac{110}{150}$$

هـ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

$$= \frac{40}{150} + \frac{60}{150} = \frac{20}{150} = \frac{120}{150}$$

مثال : (9)

من المثال السابق أوجد :

أ – احتمال سحب 4 كرات الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة زرقاء والرابعة سوداء (السحب بإرجاع) .

ب- نفس المطلوب (أ) ولكن السحب بدون إرجاع .

ج- احتمال سحب 4 كرات الأولى سوداء والثانية زرقاء والثالثة بيضاء والرابعة حمراء (السحب بإرجاع) .

د – نفس المطلوب (ج) ولكن السحب بدون إرجاع

الحل :

أ – الاحتمال المطلوب = ل (حمراء) × ل (بيضاء) × ل (زرقاء) × ل (سوداء)

$$= \frac{20}{150} \times \frac{60}{150} \times \frac{40}{150} \times \frac{30}{150}$$

ب- الاحتمال المطلوب = $\frac{20}{150} \times \frac{60}{149} \times \frac{40}{148} \times \frac{30}{147}$

(يلاحظ أن السحب بدون إرجاع أى عندما نسحب الكرة الأولى وتكون حمراء ثم لا نرجعها وبالتالى فإن الكرة البيضاء سوف تتأثر بسحب الكرة الأولى الحمراء وهكذا) .

ج – الاحتمال المطلوب = $\frac{30}{150} \times \frac{40}{150} \times \frac{60}{150} \times \frac{20}{150}$

ب- الاحتمال المطلوب = $\frac{30}{150} \times \frac{40}{149} \times \frac{60}{148} \times \frac{20}{147}$

مثال : (10) مجموعة كاملة من ورق اللعب أوجد :

أ – احتمال سحب ورقتان آس (السحب بإرجاع وبدون إرجاع)

ب- احتمال سحب ولدين (السحب بإرجاع وبدون إرجاع)

الحل : يلاحظ أن عدد أوراق اللعب = 52 ورقة

عدد أوراق الآس = 13 ورقه

عدد الأولاد فى الكوتشينة = 4 أولاد

ل (سحب آس) = $\frac{13}{52}$

ل (سحب ولد) = $\frac{4}{52}$

(أ) احتمال المطلوب فى حالة السحب بإرجاع = $\frac{13}{52} \times \frac{13}{52}$

فى حالة السحب بدون إرجاع = $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$

(يلاحظ أن السحبة الثانية سوف تتأثر بالسحبة الأولى)

(ب) الاحتمال المطلوب فى حالة السحب بإرجاع = $\frac{4}{52} \times \frac{4}{52}$

فى حالة السحب بدون إرجاع = $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$

مثال : (11)

إذا كان احتمال أن يعيش الزوج مدة 20 سنة بعد الزواج هو 3/1 واحتمال حياة الزوجة بعد 20 سنة من الزواج هو 7/2 أوجد :

أ- احتمال أن يعيشا سوياً مدة 20 سنة .

ب- احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة .

ج- احتمال أن تعيش الزوجة ويتوفى الزوج .

د- احتمال أن يتوفى الزوج والزوجة معاً .

الحل : يلاحظ أنه إذا كان احتمال الحياة للزوج هو 3/1 فإن احتمال الوفاة له هو 3/2 وكذلك إذا كان احتمال الحياة للزوجة هو 7/2 فإن احتمال الوفاة لها هو 7/5

(أ) احتمال أن يعيشا سوياً = ل (الحياة للزوج) × ل (الحياة للزوجة) =

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

(ب) احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة= ل(الحياة للزوج)×ل(الوفاة للزوجة)

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$$

(ج) احتمال أن تعيش الزوجة ويتوفى الزوج= ل(الحياة للزوجة)×ل(الوفاة للزوج)

$$= \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{21}$$

(د) احتمال أن يتوفى الزوج والزوجة معاً = ل(الوفاة للزوج) × ل(الوفاة للزوجة)

$$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

وحيث أن هذه هى كل الاحتمالات الخاصة بهذين الحدثين أى يجب أن يكون مجموعها = 1 ويمكنك التحقق من ذلك .

مثال : (12)

يوجد ثلاث مزارع لإنتاج البطاطس المزرعة (أ) أنتجت 60 طن بطاطس جيدة و 40 طن مصابة ، ومزرعة (ب) أنتجت 80 طن بطاطس جيدة و20 طن مصابة و مزرعة (ج) أنتجت 50 طن بطاطس جيدة و 50 طن مصابة. إذا أخذنا طن بطاطس من كل مزرعة أوجد :

أ – احتمال أن يكون الثلاثة طن بطاطس جيدة .

ب- احتمال أن يكون الثلاثة طن بطاطس مصابة .

ج- احتمال أن يكون الطن الأول جيد والثانى والثالث مصاب .

د – احتمال أن يكون الطن الأول والثانى جيد والثالث مصاب .

هـ- احتمال أن يكون الطن الأول والثالث جيد والثانى مصاب .

و – احتمال أن يكون الطن الثانى والثالث جيد والأول مصاب .

ز – احتمال أن يكون الطن الثانى جيد و الأول والثالث مصاب .

ح- احتمال أن يكون الطن الثالث جيد والأول والثانى مصاب .

الحل : يلاحظ أن

الإنتاج الكلى للمزرعة (أ) = 60 + 40 = 100 طن

الإنتاج الكلى للمزرعة(ب) = 80 + 20 = 100 طن

الإنتاج الكلى للمزرعة(ج) = 50 + 50 = 100 طن

(أ) الاحتمال المطلوب = $\frac{60}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} = 0.240$

(ب) الاحتمال المطلوب = $\frac{40}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} = 0.040$

(ج) الاحتمال المطلوب = $\frac{60}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} = 0.060$

(د) الاحتمال المطلوب = $\frac{60}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} = 0.240$

(هـ)الاحتمال المطلوب = $\frac{60}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{20}{100} = 0.060$

(و) الاحتمال المطلوب = $\frac{80}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{40}{100} = 0.160$

(ز) الاحتمال المطلوب = $\frac{80}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{50}{100} = 0.160$

(ح) الاحتمال المطلوب = $\frac{50}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = 0.040$

مثال : (13)

إذا كان احتمال فوز الأهلى فى مباراة ما هو 0.9 واحتمال فوز الزمالك هو 0.5 احسب احتمال فوز أحدهما على الأقل .

الحل : ل (فوز أحدهما على الأقل) = ل (فوز الأهلى) + ل (فوز الزمالك)

– ل (فوزهما سوياً)

$$0.9 + 0.5 + 0.45 = 1.40 - 0.45 = 0.95$$

حل آخر: ل (فوز أحدهما على الأقل) = 1 − ل (عدم فوز أى منهما)

$$= 1 - 0.1 \times 0.5 = 1 - 0.05 = 0.95$$

(يلاحظ أن ل (فوز النادى الأهلى) هو 0.9 ول (عدم فوزه) هو 0.1 وبالنسبة لنادى الزمالك فإن ل (الفوز) = ل (عدم الفوز) = 0.5

مثال : (14)

إذا كان احتمال نجاح طالب فى مادة الرياضة بكلية الزراعة هو 8. ما هى الاحتمالات المختلفة لنجاح 5 طلبة من عدمه .

الحل :

للإجابة على هذا التمرين سوف يستخدم توزيع ذو الحدين على اعتبار أن الحد الأول وهو يمثل احتمال النجاح وهو 0.8 والحد الثانى يمثل احتمال عدم النجاح وهو 0.2 وعدد الطلبة (ن) هو 5 .

$$\therefore (0.2 + 0.8)^5 = (0.8)^5 + \binom{5}{1}(0.8)^4(2)^1 + \binom{5}{2}(0.8)^3(0.2)^2$$

$$+ \binom{5}{3}(0.8)^2(0.2)^3 + \binom{5}{4}(0.8)(0.2)^4 + (0.2)^5$$

حيث $(0.8)^5$ تشير إلى احتمال نجاح الخمس طلاب ،

$\binom{5}{1}(0.8)^4(2)^1$ تشير إلى احتمال نجاح 4 طلبة ورسوب طالب واحد ،

$\binom{5}{2}(0.8)^3(0.2)^2$ تشير إلى احتمال نجاح 3 ورسوب 2 ،

$\binom{5}{3}(0.8)^2(0.2)^3$ تشير إلى احتمال نجاح 2 ورسوب 3 ،

$\binom{5}{4}(0.8)(0.2)^4$ تشير إلى احتمال نجاح طالب واحد ورسوب 4 ،

$(0.2)^5$ تشير إلى عدم نجاح أحد وحيث أن هذه هى كل الاحتمالات الممكنة لهذا الحادث فإن مجموعها يجب أن يكون مساوياً الواحد الصحيح (تأكد من ذلك) .

مثال : (15)

فى عائلة مكونة من 4 أفراد أوجد :

أ – احتمال أن يكونوا ذكور

ب- احتمال وجود 2 ذكور

ج – احتمال وجود ذكر واحد على الأكثر

د – احتمال وجود ذكر واحد على الأقل

هـ- احتمال وجود ذكر وأنثى على الأقل

الحل : يلاحظ هنا أنه إذا رمزنا للذكر بالرمز (ذ) وللأنثى بالرمز (ث) فإن

ل (ذ) = ل (ث) = 2/1 وأن توزيع ذو الحدين يكون على الصورة

$$(\text{ذ} + \text{ث})^4 + (\text{ذ})^4 + \binom{4}{1}(\text{ذ})^3(\text{ث}) + \binom{4}{2}(\text{ذ})^2(\text{ث})^2 + \binom{4}{3}(\text{ذ})(\text{ث})^3 + (\text{ث})^4$$

وبالتعبير عن ذ = ث = 2/1

(أ) احتمال أن يكون 4 أفراد ذكور = $(\text{ذ})^4 = (2/1)^4 = 16/1$

(ب) احتمال وجود 2 ذكور = $\binom{4}{2}(\text{ذ})^2(\text{ث})^2 = \binom{4}{2}(2/1)^3(2/1)^2 = 16/6$

(ج) احتمال وحول وجود ذكر واحد على الأكثر = ل (وجود ذكر واحد و3 إناث) + ل (عدم وجود ذكر أى الكل إناث)

$$= \binom{4}{1}(\text{ذ})^1(\text{ث})^3 + (\text{ث})^4$$

$$= \binom{4}{1}(2/1)(2/1)^3 + (2/1)^4$$

$$= 4 \times 16/1 + 16/1 = 16/5$$

د) احتمال وجود ذكر واحد على الأقل = ل (وجود ذكر) + ل (وجود ذكرين) + ل (وجود 3 ذكور) + ل (وجود 4 ذكور)

$$= \binom{4}{1} (\text{ذ})^{1} (\text{ث})^{3} + \binom{4}{2} (\text{ذ})^{2} (\text{ث})^{2} + \binom{4}{3} (\text{ذ})^{3} (\text{ث}) + (\text{ذ})^{4}$$

$$= \binom{4}{1} (1/2) (1/2)^{3} + \binom{4}{2} (1/2)^{2} (1/2)^{2} + \binom{4}{3} (1/2)^{3} (1/2) + (1/2)^{4}$$

$$= 4 \times 1/16 + 6 \times 1/16 + 4 \times 1/16 + 1/16 = 15/16$$

أو حل أخر:

ل (وجود ذكر واحد على الأقل) = 1 – ل (عدم وجود إناث)

$$= 1 - (\text{ذ})^{4} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

ملحوظة :

فى حالة توزيع ذو الحدين وكان $p = q = \frac{1}{2}$ فأن احتمال الحصول على 4 ذكور

فى عائلة مكونة من 4 أفراد يساوى احتمال الحصول على 4 إناث فى نفس العائلة لأن احتمال الذكر يساوى احتمال الأنثى .

مثال : (16)

أوجد مفكوك $(\text{س} + 3\,\text{ص})^{4}$

الحل :

$$(\text{س} + 3\,\text{ص})^{4} = \text{س}^{4} + \binom{4}{1} (\text{س})^{3} (3\,\text{ص})^{1} + \binom{4}{2} (\text{س})^{2} (3\,\text{ص})^{2}$$

$$+ \binom{4}{3} (س) (3\ ص)^3 + (3\ ص)^4 = 108\ س\ ص^3 + 81\ ص^4$$

مثال : (17)

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(س + 3\ ص)^4$

الحل :

حيث أن ن عدد زوجى يساوى 4 فإن عدد الحدود = ن + 1 = 5

$$\text{وترتيب الحد الأوسط} = \left(\frac{ن}{2} + 1\right) = \left(\frac{4}{2} + 1\right) = 3$$

أى الحد الثالث $ح_3 = ح_{2+1}$

وعلية فإن (ر = 2) ومن القانون الخاص

بذلك نجد أن $ح_{2+1} = \binom{1}{2} (س)^2 (3ص)^2 = 54\ س^2\ ص^2$

ملحوظة : لإيجاد الحد رقم كذا نطبق القانون

$$ح_{ر+1} = \binom{ن}{ر} س^{ن-ر} ص^ر$$

مثال: (18)

إذا كان احتمال إنتاج وحدة معيبة فى إنتاج آلة معينة يساوى .01. أوجد احتمال أن تشمل عينة من 1000 وحدة من إنتاج هذه الآلة على :

(أ) 2 وحدة معيبة　　　(ب) وحدة واحدة معيبة على الأقل

الحل :

حيث أن u صغيرة جداً ، ن كبيرة جداً فيحسن استخدام توزيع بواسون نظراً لسهولة بالمقارنة بتوزيع ذات الحدين .

$$P(x) = \frac{e^{-u} u^{x}}{!x} = \frac{e^{-u} u^{x}}{!x}$$

حيث (u) عبارة عن ثابت إحصائى معين وهى قيمة نظرية تمثل متوسطة (X) ، e رقم ثابت يساوى 2.718 تقريباً

x = 1، 2 ، 3 .... متغير متقطع

يلزم إيجاد المتوسط µ = ن ل1 = 0.01 × 1000 = 10

$$P(2) = \frac{{}^{-10}e \ 10^{2}}{2\ !} = \frac{(2.817)^{-10}\ (10)^{2}}{2\ !} = 0.0016$$

$$P(1 \text{ at lest}) = 1 - P(0)$$

$$= 1 - \frac{(2.718)^{-10}\ (10)^{zero}}{zero\ !}$$

$$= 0.999968$$

مثال : (19)

إذا كان احتمال إنتاج وحدة معيبة من إنتاج آلة معينة تساوى 0.05 فأوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع الوحدات المعيبة فى مجموعة من 1000 وحدة من إنتاج هذه الآلة .

الحل :

ن = 1000 $\quad$ ل1 = 0.05 $\quad$ ل2 = 0.95

الوسط الحسابى = ن ل1 = 1000 × 0.05 = 50 وحدة .

الانحراف المعيارى = $\sqrt{\text{ن ل1 ل2}}$ = $\sqrt{1000 \times 0.05 \times 0.95}$ = 6.89

مثال : (20)

فى أحد مزارع البطاطس وجد أن معدل الإصابة بمرض العفن البنى هو 30% فإذا فحصت 6 طن بطاطس ما هى الاحتمالات المختلفة للإصابة من عدمه .

الحل :

من الممكن التعبير رياضياً عن قيمة الاحتمالات المختلفة للأحداث على أساس مفكوك ذات الحدين حيث يكون احتمال الإصابة 0.30 واحتمال عدم الإصابة 0.70 ويعبر عن ذلك بمفكوك المعادلة :

$$(0.7 + 0.3)^6 =$$

$$= (0.3)^6 + \binom{6}{1}(0.3)^5 (0.7) + \binom{6}{2}(0.3)^4 (0.7)^2 + \binom{6}{3}(0.3)^3$$

$$(0.7)^3 + \binom{6}{4}(0.3)^2 (0.7)^4 + \binom{6}{5}(0.3)(0.7)^5 + (0.7)^6$$

ويعبر عن جميع الاحتمالات فى الجدول التالى

الاحتمال	قيمة الاحتمال
1- احتمال 6 طن مصابة = $(0.3)^6$	0.0008
2- احتمال 5 طن مصابة وواحد غير مصاب = $\binom{6}{1}(0.3)^5(0.7)$	0.0105
3- احتمال 4 طن مصابة و2 طن غير مصابة = $\binom{6}{2}(0.3)^4(0.7)^2$	0.0594
4- احتمال3 طن مصابة و3 طن غير مصابة = $\binom{6}{3}(0.3)^3(0.7)^3$	0.1852
5- احتمال 2 طن مصابة و4 غير مصابة = $\binom{6}{1}(0.3)^2(0.7)^4$	0.3241
6- احتمال طن مصاب والباقى غير مصاب = $\binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5$	0.3025
7- احتمال عد الإصابة = $(0.7)^6$	0.1175
مجموع الاحتمالات	1.000

مثال : (21)

عند رمى زهرتى نرد ما هو احتمال ظهور المجموع 7 أو المجموع 11

الحل : الحادث هنا يتكون من حادثين .

نفرض أن ($أ_1$) هو ظهور المجموع 7 ويتكون من الأحداث (1 ، 6) ، (6 ، 1) ، (2 ، 5) ، (5 ، 2) ، (4 ، 3) ، (3 ، 4)

∴ ح ($أ_1$) = $\frac{6}{36}$

وأن (ب) هو ظهور المجموع 11 ويتكون من الأحداث (6 ، 5) ، (5 ، 6)

∴ ح (ب) = $\frac{2}{36}$

∴ح (أ ، ب) = ح (أ) + ح (ب)

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$$

مثال : (22)

ما هو احتمال ظهور المجموع 10 على الأقل عند إلقاء زهرتين من زهرات النرد.

الحل :

نفترض أن أ ، ب ، ج عبارة عن حوادث الحصول على المجموع 10 ، 11 ، 12 على الترتيب .

ح (أ) = احتمال ظهور المجموع 10

$$= \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 10}}{\text{عدد المرات جميعها}} = \frac{3}{36}$$

ح (ب) = احتمال ظهور المجموع 11

$$= \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 11}}{\text{عدد المرات جميعها}} = \frac{2}{36}$$

ح (ج) = احتمال ظهور المجموع 12

$$= \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 12}}{\text{عدد المرات جميعها}} = \frac{1}{36}$$

ح (أ أو ب أو ج) = ح (أ) + ح (ب) + ح (جـ)

$$= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال : (23)

صندوق به 25 رقم منهم خمسة فقط لهم الحق فى الحصول على جوائز فما هو احتمال سحب رقمين لجائزتين فى المرتين المتتاليتين .

الحل :

نفرض أن حادث الحصول على جائزة فى السحب الأول هو (أ) وحادث الحصول على جائزة فى السحب الثانى هو (ب) وبتطبيق قاعدة ضرب الاحتمالات وهى :

ح (أ ، ب) = ح (أ) × ح (ب / أ)

∴ ح (أ) $= \frac{5}{25}$ ، ح (ب) $= \frac{4}{24}$

∴ ح (أ ، ب) $= \frac{5}{25} \times \frac{4}{24} = \frac{1}{30}$

واضح أن قيمة ح (ب/أ) $= \frac{4}{24}$ حيث أنه فى السحبة الأولى ظهر رقم ما لجائزة وبالتالى فإن عدد أرقام الجوائز أصبح 4 فقط والعدد الكلى 24

مثال : (24)

مجموعة كاملة من أوراق اللعب سحب منها ورقة على مرتين متتاليتين فما هو احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان ولد وذلك فى حالة :

(1) السحب بإحلال مرة

(2) السحب بدون إحلال مرة أخرى

الحل . (1) السحب بإحلال معناه أن الورقة المسحوبة فى المره الأولى يتم إرجاعها إلى مجموعة ورق اللعب قبل السحبة الثانية فإذا رمزنا للسحبة الأولى بالرمز (أ) وللسحبة الثانية بالرمز (ب) فإن :

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد الأولاد}}{\text{مجموعة ورق اللعب كلها}} = \frac{4}{52}$$

$$\text{ح (ب)} = \frac{\text{عدد الأولاد}}{\text{مجموعة ورق اللعب كلها}} = \frac{4}{52}$$

ح (أ ، ب) = ح (أ) × ح (ب)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{16}{2704} = \frac{1}{169}$$

(2) السحب بدون إحلال معناه أن السحبة الأولى سوف لا يتم إرجاعها إلى مجموعة ورق اللعب وبالتالى فإن السحبة الثانية سوف تتأثر بنتيجة السحبة الأولى وأن عدد الأولاد سوف يصبح 3 بدلاً من 4 وعدد ورق اللعب سوف يصبح 51 بدلاً من 52 وعلية فإن :

$$\text{ح (أ)} = \frac{4}{25} \text{ ، } \text{ح (ب/أ)} = \frac{3}{51}$$

ح (أ ، ب) = ح (أ) × ح (ب/أ)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$$

مثال : (25)

بفرض أن احتمال الحصول على مولود ذكر = $\frac{1}{2}$ أوجد الاحتمال بالنسبة لعائلة مكونة من 6 أطفال إذا علمت :

(1) أن جميع الأطفال من نفس الجنس .

(2) أن خمسة أطفال ذكور وأنثى واحدة .

الحل :

(1) نفرض حادث الحصول على جميع الأطفال ذكور هو (أ$_1$) والرمز (أ$_2$) لحادث الحصول على جميع الأطفال إناث .

وحيث أن (أ$_1$ ، أ$_2$) من الحوادث المانعة فإن :

ح (أ$_1$ ، أ$_2$) = ح (أ$_1$) × ح (أ$_2$)

وحيث أن المواليد الستة تعتبر حوادث مستقلة بالنسبة لجنس كل طفل ، فإنه يمكن استخدام المعادلة :

ح (أ$_1$ ، أ$_2$) = ح (أ$_1$) × ح (أ$_2$)

لأكثر من حادثين وعليه يكون :

ح (أ$_1$) = احتمال أن المواليد الستة ذكور =

$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^6$$

وبالمثل ح ($أ_2$) = احتمال أن المواليد الستة إناث = $(\frac{1}{2})^6$

$$\therefore \text{ح}(أ_1 ، أ_2) = (\tfrac{1}{2})^6 + (\tfrac{1}{2})^6 = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$$

(2) .. احتمال الذكر – احتمال الأنثى = $(\frac{1}{2})$

∴ ح(5 ذكور وأنثى) = ح (5 إناث وذكر) = ح (6 ذكور) = $(\frac{1}{2})^6$

مثال : (26)

ما هو احتمال الحصول على خمسة أوراق تريل من مجموعة كاملة من ورق اللعب عددها 52 ورقة

الحل : عدد طرق سحب خمسة أوراق المجموعة كلها = $^{52}ق_5$

$$= \frac{48 \times 49 \times 50 \times 51 \times 52}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

عدد طرق سحب خمسة أوراق تريل = $^{13}ق_5$

$$= \frac{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

وحيث أن عدد الأوراق التريل فى المجموعة الكاملة 13 ورقة

∴ احتمال سحب خمسة أوراق تريل = $\frac{^{13}ق_5}{^{52}ق_5}$

$$= \frac{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{48 \times 49 \times 50 \times 51 \times 52} = 0.005$$

مثال : (27)

قائمة بعدد 20 متطوعاً للتبرع بالدم منهم 15 فرداً دمهم من فصيلة B فإذا أخذنا عينة عشوائية من ثلاثة أشخاص فما هو احتمال :

(1) أن الثلاثة من فصيلة B .

(2) أن أثنين من فصيلة B وواحد من أى فصيلة أخرى .

(3) أن واحد على الأقل من فصيلة B .

الحل: العدد الكلى للنتائج الممكنة هو عبارة عن عدد طرق اختيار الثلاثة أفراد من المجموعة كلها والتى عددها 20 هو $^{20}\text{ق}_{3}$

وعدد الطرق المقابلة للحادث الثلاثة من فصيلة الدم B هو $^{15}\text{ق}_{3}$

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = \frac{^{15}\text{ق}_{3}}{^{20}\text{ق}_{3}} = \frac{13 \times 14 \times 15}{18 \times 19 \times 20} = 0.40$$

(2) عدد الطرق المقابلة للحادث المطلوب هو عدد طرق اختيار فردين من فصيلة الدم Bوفرد من أى فصيلة دم أخرى وذلك نحصل عليه من القانون$^{15}\text{ق}_{2} \times {}^{5}\text{ق}_{1}$

$$\text{ويكون الاحتمال المطلوب} = \frac{^{15}\text{ق}_{2} \times {}^{15}\text{ق}_{3}}{^{20}\text{ق}_{3}}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 4 \times 13 \times 14 \times 15}{18 \times 19 \times 20} = 0.46$$

(ج) احتمال أن فرداً واحداً على الأقل من فصيلة الدم B يعنى أن فرداً واحداً من فصيلة دم B وفردان من فصيلة دم أخرى ، أو فردين من فصيلة دم B وفرد واحد من فصيلة دم أخرى أو ثلاثة أفراد من فصيلة دم B ، أى أن الحادث الوحيد غير المطلوب هو ظهور 3 أفراد من فصيلة ليست فصيلة الدم B أى :

الاحتمال المطلوب = 1 − احتمال أن الثلاثة من فصيلة دم ليست B

$$= 1 - \frac{{}_{3}ق^{5}}{{}_{3}ق^{20}} = 1 - \frac{3 \times 4 \times 5}{18 \times 19 \times 20}$$

$$= 1 - \frac{1}{114} = \frac{113}{114} = 0.99$$

مثال : (28)

إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من كلية الزراعة هو 0.6 وإذا كان لدينا 7 طلاب أوجد :

(1) احتمال أن يتخرج طالب واحد فقط

(2) احتمال أن يتخرج طالب واحد على الأقل

(3) احتمال أن يتخرج 5 طلاب على الأكثر

(4) احتمال أن لا يتخرج أحد

الحل :

احتمال التخرج = 0.6

احتمال عدم التخرج (ل) = 1 – 0.6 = 0.4

عدد الطلاب (ن) = 7

يمكن الحصول على الاحتمالات المطلوبة من مفكوك ذات الحدين كالآتى :

$$(0.6 + 0.4)^7 = (0.6)^7 + {}^7\text{ق}_1 (0.6)^6 (0.4)^1 + {}^7\text{ق}_2 (0.6)^5 (0.4)^3 + {}^7\text{ق}_3 (0.6)^4$$

$$(0.4)^3 + {}^7\text{ق}_4 (0.6)^3 (0.4)^4 + {}^7\text{ق}_5 (0.6)^2 (0.4)^5 + {}^7\text{ق}_6 (0.6)^1$$

$$(0.4)^6 + (0.4)^7$$

(1) احتمال أن يتخرج طالب واحد فقط =

$$ {}^7\text{ق}_1 (0.6)^1 (0.4)^6 = 0.107$$

(2) احتمال أن يتخرج طالب واحد على الأقل = 1 – احتمال ألا يتخرج أحد

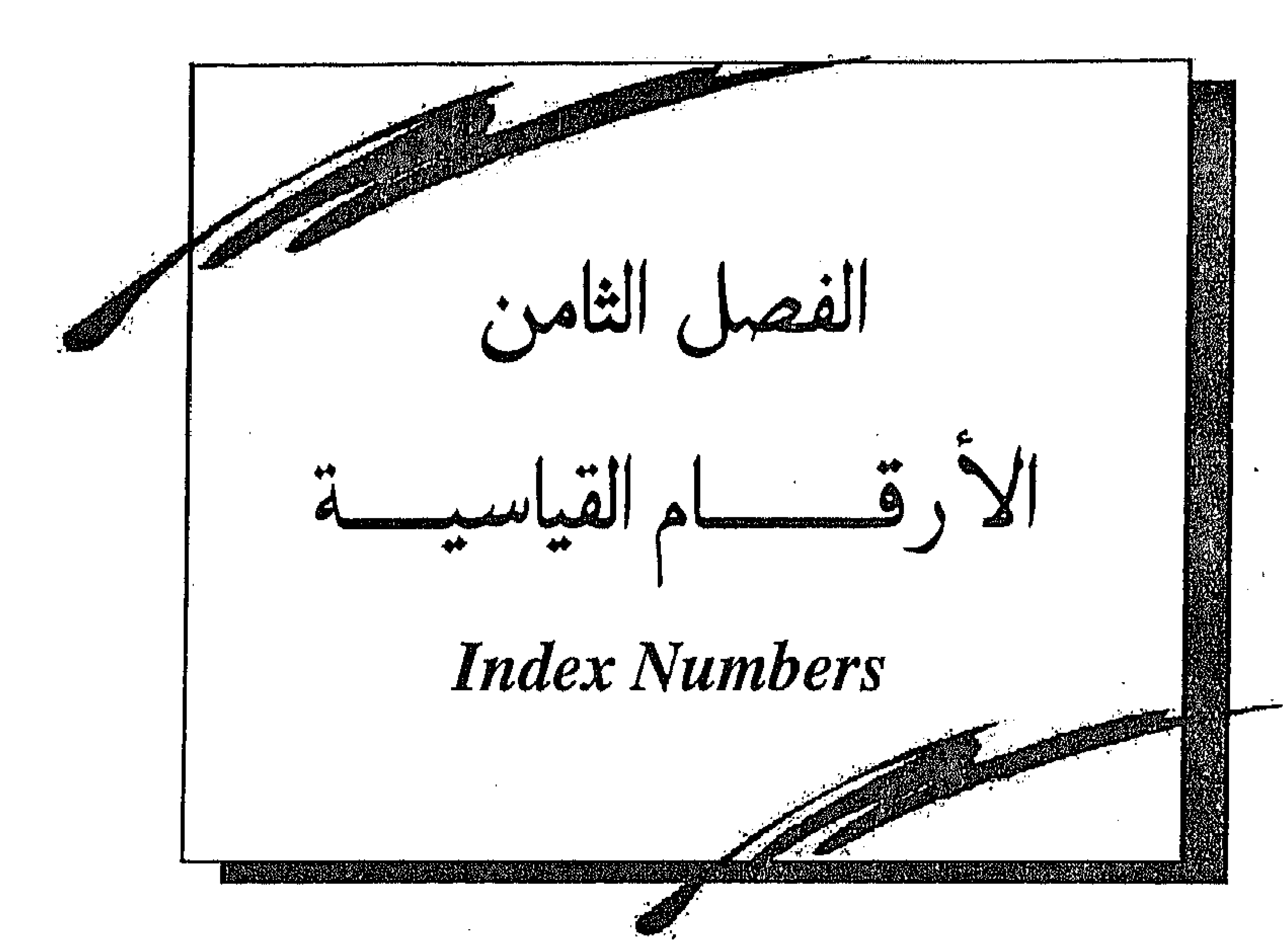
$$= 1 - {}^7\text{ق}_0 (0.6)^0 (0.4)^7$$

$$= 1 - 0.0016 = 0.9984$$

(3) احتمال أن يتخرج 5 طلبة على الأكثر عبارة عن

$$ {}^7\text{ق}_0 (0.6) (0.4)^7 + {}^7\text{ق}_1 (0.6) (0.4)^6 + {}^7\text{ق}_2 (0.6)^2 (0.4)^5 + {}^7\text{ق}_3 (0.6)^3 (0.4)^4$$

$$+ {}^7\text{ق}_4 (0.6)^2 (0.4)^5 + {}^7\text{ق}_5 (0.6)^2 (0.4)^5 = 0.261$$


الفصل الثامن
الأرقـــام القياســـية
Index Numbers

تمهيد :

تعتبر الأرقام القياسية وسيلة من الوسائل الإحصائية الهامة لقياس التغيرات النسبية التى تحدث لكثير من الظواهر الاقتصادية أو التجارية أو الإدارية أو الاجتماعية مثل التغيرات فى أسعار السلع والخدمات المنتجة والصادرات والواردات والأجور وغير ذلك من الظواهر، بالنسبة إلى فترتين زمنيتين مختلفتين أو مكانين مختلفين . ويعتبر قياس التغير فى هذه الظواهر من الأمور الهامة للتعرف على الظروف الاقتصادية للدولة ، وبالتالى رسم الخطط والسياسات الملائمة للتغير فى هذه الظواهر حتى لا يتأثر اقتصاد الدولة بهذه التغيرات .

ويعرف الرقم القياسى بأنه مقياس نسبى يقيس التغير فى ظاهرة ما خلال فترتين زمنيتين أو مكانين مختلفين وتسمى الفترة الزمنية الأولى السابقة للفترة الزمنية الثانية بأسم فترة الأساس فى حين تسمى الفترة الزمنية الثانية بأسم فترة المقارنة ، وكذلك الحال بالنسبة للمكان .

ويجب أن تتميز فترة الأساس التى تم اختيارها بالاستقرار الاقتصادى وخالية من الظروف أو العوامل غير الملائمة مثل الحروب والأزمات الاقتصادية والتى قد تؤثر على الظاهرة موضع البحث والدراسة . ونفس الحال بالنسبة لمكان الأساس فيجب أن يكون له أهمية خاصة بالنسبة للظاهرة .

وتأخذ الأرقام القياسية صوراً متعددة منها الرقم القياسى لنفقة المعيشة (أسعار المستهلكين) والرقم القياسى لأسعار الجملة والرقم القياسى للإنتاج الصناعى والزراعى وللحاصلات الزراعية وغير ذلك من الأرقام القياسية . وتعتبر الأرقام القياسية للأسعار والكميات من أكثر

الأرقام القياسية استخداماً فى الحياة وهى التى سوف تقتصر دراستنا عليها .

ويلاحظ أن الأسس والقواعد التى تراعى عند تركيب الرقم القياسى للأسعار هى نفس الأسس والقواعد التى تستخدم فى تركيب الأرقام القياسية الأخرى .

أنواع الأرقام القياسية :

يتم تركيب الرقم القياسى للأسعار باستخدام إحدى الصور الآتية :

أولاً : الرقم القياسى البسيط:

1- الرقم القياسى البسيط للأسعار (منسوب السعر) :

Simple Index Number

وهو أبسط أنواع الأرقام القياسية ويحسب من خلال قسمة سعر السلعة فى سنة المقارنة ($ع_1$) على سعرها فى سنة الأساس ($ع_0$) كالآتى :

$$\text{الرقم القياسى البسيط للأسعار} = \frac{ع_1}{ع_0} \times 100$$

مثال : إذا كان سعر السلعة فى سنة 1995 هو 30 جنيهاً وسعرها فى سنة 1998 هو 35 جنيهاً احسب الرقم القياسى البسيط للأسعار (منسوب السعر) فى سنة 1998 بالنسبة لسنة 1995 .

الحل : الرقم القياسى البسيط للأسعار أو منسوب السعر

$$= \frac{\text{سعر السلعة فى سنة المقارنة (1998)}}{\text{سعر نفس السلعة فى سنة الأساس (1995)}} \times 100$$

$$= \frac{35}{30} \times 100 = 116.67\%$$

أى أن سعر السلعة فى سنة 1998 زاد بنسبة 16.76٪ عن سعرها فى سنة 1995.

2- الرقم القياسى البسيط للكميات :

ويمكن الحصول عليه من الصيغة التالية :

$$\text{الرقم القياسى البسيط للكميات} = \frac{\text{الكمية فى سنة المقارنة}}{\text{الكمية فى سنة الأساس}} \times 100$$

$$= \frac{ك_1}{ك_0} \times 100$$

3- الرقم القياسى البسيط للقيمة :

ويمكن الحصول عليه من الصيغة التالية :

$$\text{الرقم القياسى البسيط للقيمة} = \frac{\text{القيمة فى سنة المقارنة}}{\text{القيمة فى سنة الأساس}} \times 100$$

$$= \frac{ق_1}{ق_0} \times 100$$

وحيث أن القيمة = السعر × الكمية أى $ق_1 = ع_1 \, ك_1$

، $ق_0 = ع_0 \, ك_0$

$$\therefore \text{الرقم القياسى للقيمة} = \frac{ع_1 \, ك_1}{ع_0 \, ك_0} \times 100$$

مثال : البيانات التالية تمثل الأسعار والكميات من أحد السلع خلال الفترة 1996 – 2000 .

السنوات	السعر	الكمية
1996	10	100
1997	12	120
1998	14	140
1999	15	160
2000	17	180

والمطلوب حساب الأرقام القياسية البسيطة للأسعار والكميات والقيمة لهذه السلعة باعتبار أن سنة 1996 سنة أساس .

الحل :

السنوات	منسوب السعر (٪)	منسوب الكمية (٪)	القيمة	منسوب القيمة (٪)
1996	100	100	1000	100
1997	120	120	1560	156
1998	140	140	1960	196
1999	150	160	2400	240
2000	170	180	3060	306

من الجدول السابق يلاحظ أن سعر السلعة فى سنة 2000 زاد بنسبة 70٪ عما كانت عليه فى سنة 1996 ، بينما كمية السلعة فى سنة 2000 زادت بنسبة 80٪ عما كانت عليه فى سنة 1996 . أما قيمة السلعة فى سنة 2000 فقد زادت بنسبة 206٪ عما كانت عليه فى سنة 1996 .

ثانياً : الأرقام القياسية التجميعية البسيطة

Simple Aggregative Index Numbers

تتيح لنا هذه الطريقة لحساب الرقم القياسى المقارنة بين أسعار مجموعة من السلع فى سنة المقارنة مع سنة الأساس ، ونفس الحال بالنسبة للكميات وللقيم .

(أ) الرقم القياسى التجميعى للأسعار :

$$\text{الرقم التجميعى البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}} \times 100$$

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} \times 100$$

(ب) الرقم القياسى التجميعى المرجح

Weighted Aggregative Index Numbers

تستخدم الأرقام القياسية التجميعية المرجحة للتغلب على عيب الـرقم القياسـى التجميعى البسيط وهـو تجاهـل الأهميـة النسـبية للسـلع المختلفة ، ولـذلك فإننـا نـرجح أسـعار كـل سـلعة بالـكمية المباعة منهـا . وقد يتم ترجيح الأسعار بكميات سنة الأساس (ك$_0$) أو بكميات سنة المقارنة (ك$_1$) كالتالى :

1- الرقم القياسى المرجح بكميات سنة الأساس :

يرجـع اشـتقاق هـذا الـرقم إلى لاسـبير Laspeyres والمعادلـة الرياضية الخاصة برقم لاسبير هى :

$$\text{رقم لاسبير} = \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0} \times 100$$

2- الرقم القياسى المرجح بكميات سنة المقارنة :

يرجع اشتقاق هـذا الـرقم إلى بـاش Paasche والمعادلـة الرياضية الخاصة به هى :

$$\text{رقم باش} = \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_1} \times 100$$

3- رقم درويش وبالى القياسى Drobish Index

وهو يعبر عن الوسط الحسابى لكل من رقم لاسبير ورقم باش

$$\text{رقم درويش وبالى} = \frac{\dfrac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_0} + \dfrac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_1}}{2} \times 100$$

4- رقم فيشر القياسى Fisher Index

وهو يعبر عن الوسط الهندسى لكل من رقم لاسبير ورقم باش

$$\text{الرقم القياسى لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_1}} \times 100$$

5- رقم مارشال- إدجورث المثالى Edgeworth Index

ويعبر عنه بالصورة الرياضية التالية :

$$\text{رقم مارشال- إدجورث} = \frac{\text{مجـ (ع}_1\text{ ك}_0 + \text{ع}_1\text{ ك}_1)}{\text{مجـ (ع}_0\text{ ك}_0 + \text{ع}_0\text{ ك}_1)} \times 100$$

مثال : من بيانات الجدول التالى :

السلعة	سنة 1995		سنة 2000	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	5	17	10	25
ب	11	21	14	30
ج	9	29	12	35
ء	4	41	6	50

والمطلوب حساب الرقم القياسى للأسعار وذلك باستخدام

1- رقم لاسبير، 2- رقم باش ، 3- رقم فيشر ،

4- رقم درويش وبالى ، 5- رقم مارشال وأدجورث

إذا علمت أن سنة 1995 سنة أساس .

الحل : نكون الجدول التالى :

نوع السلعة	$ع_0$	$ك_0$	$ع_1$	$ك_1$	$ع_0 ك_0$	$ع_0 ك_1$	$ع_1 ك_0$	$ع_1 ك_1$
أ	5	17	10	25	85	125	170	250
ب	11	21	14	30	231	330	294	420
ج	9	29	12	35	261	315	348	420
ء	4	41	6	50	164	200	246	300
					741	970	1058	1390

1 - رقم لاسبير = $\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_0} \times 100$

$= \frac{1058}{741} \times 100 = 142.8\%$

2- رقم باش = $\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_1} \times 100$

$= \frac{1390}{970} \times 100 = 143.3\%$

3- رقم فيشر المثالى =

$$\sqrt{\frac{\text{مجـ}\, ع_1 ك_0}{\text{مجـ}\, ع_0 ك_0} \times \frac{\text{مجـ}\, ع_1 ك_1}{\text{مجـ}\, ع_0 ك_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.408 \times 1.433} \times 100 = 143.15\%$$

4- رقم درويش وبالى =

$$\frac{\frac{\text{مجـ}\, ع_1 ك_0}{\text{مجـ}\, ع_0 ك_0} + \frac{\text{مجـ}\, ع_1 ك_1}{\text{مجـ}\, ع_0 ك_1}}{2} \times 100$$

$$= \frac{1.433 + 1.428}{2} \times 100 = 143.06\%$$

5- رقم مارشال- إدجورث =

$$\frac{\text{مجـ}\,(ع_1 ك_0 + ع_1 ك_1)}{\text{مجـ}\,(ع_0 ك_0 + ع_0 ك_1)} \times 100$$

$$= \frac{\text{مجـ}\, ع_1 ك_0 + \text{مجـ}\, ع_1 ك_1}{\text{مجـ}\, ع_0 ك_0 + \text{مجـ}\, ع_0 ك_1} \times 100$$

$$= \frac{1390 + 1058}{970 + 741} \times 100$$

$$= \frac{2448}{1711} \times 100 = 143.07\%$$

مثال : من بيانات المثال السابق احسب الأرقام القياسية التجميعية السابقة للكميات مرجحاً بالأسعار كما يلى :

الحل : من بيانات جدول حل المثال السابق يمكن حساب الأرقام القياسية التجميعية للكميات المرجحة بالأسعار سنة الأساس 1995 كما يلى :

1 – رقم لاسبير للكميات = $\frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0} \times 100$

$$= \frac{970}{741} \times 100 = 130.9\%$$

2- رقم باش للكميات = $\frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_1} \times 100$

$$= \frac{1390}{1058} \times 100 = 131.38\%$$

3- رقم فيشر للكميات = $\sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_1}} \times 100$

$$= \sqrt{1.309 \times 1.313} \times 100 = 131.09\%$$

4- رقم درويش وبالى للكميات = $\dfrac{\dfrac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0} + \dfrac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_1}}{2} \times 100$

$$= \frac{1.313 + 1.309}{2} \times 100 = 131.1\%$$

5- رقم مارشال- إدجورث للكميات = $\dfrac{\text{مجـ }(\text{ك}_1\text{ع}_0 + \text{ك}_1\text{ع}_1)}{\text{مجـ }(\text{ك}_0\text{ع}_0 + \text{ك}_0\text{ع}_1)} \times 100$

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0 + \text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0 + \text{مجـ ك}_0\text{ع}_1} \times 100$$

$$= \frac{1390 + 970}{1058 + 741} \times 100 = 131.18\%$$

ثالثاً : المتوسطات البسيطة للمناسيب

Simple Average of Relative Indices

بدلاً من حساب الأرقام القياسية بطريقة التجميع لأسعار وكميات السلع المختلفة الداخلة فى تركيب الرقم القياسى فإن استخدام مناسيب الأسعار على حدة يمكن أن يكون أسلوباً مناسباً لمعرفة التغيرات فى أسعار سلعة معينة بين سنة الأساس وسنة المقارنة ويعرف منسوب السعر كما ذكر سابقاً بأنه النسبة بين سعر السلعة فى سنة المقارنة وسنة الأساس ($ع_1$: $ع_0$) وأيضاً ($ك_1$: $ك_0$) تعرف بمنسوب الكمية .

ووفقاً لهذه الحالة يكون لدينا عدداً من مناسيب الأسعار وعدد من مناسيب الكميات ويمكن استخراج المتوسط لكل منها كالآتى :

1- الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار

$$\text{الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار} = \frac{\text{مجموع مناسيب الأسعار}}{\text{عددها}} \times 100$$

$$= \frac{\text{مجـ} (ع_1 / ع_0) \times 100}{ن}$$

حيث $ع_1$ أسعار سنة المقارنة ، $ع_0$ أسعار سنة الأساس ، ن هى عدد السلع .

2- الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار :

الوسط الهندسى البسيط للمناسيب = $\sqrt[ن]{\text{حاصل ضرب المناسيب}}$

ولتسهيل إيجاد الوسط الهندسى البسيط للمناسيب فإنه غالباً ما تستخدم اللوغاريتمات لتبسيط العمليات الحسابية على الوجه الأكمل كالآتى :

$$\text{لو (الوسط الهندسى البسيط للمناسيب)} = \frac{\text{لو س}_1 + \text{لو س}_2 + \ldots\ldots + \text{لو س}_{ن}}{ن}$$

$$= \frac{\sum\limits^{ن} \left[\text{لو } (ع_1 / ع_0) \times 100 \right]}{ن}$$

ويكون الوسط الهندسى للمناسيب هو العدد المقابل لناتج اللوغاريتم السابق .

مثال : احسب الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار والوسط الهندسى البسيط للمناسيب من بيانات الجدول التالى باعتبار سنة 1995 سنة أساس .

السلعة	الأسعار	
	1995	**2000**
أ	70	170
ب	42	80
ج	14	26
ء	24	47

الحل : نكون الجدول التالى والذى يوضح حساب مناسيب الأسعار

السلعة	1995	2000	المنسوب = $\frac{ع_1}{ع_0} \times 100$
	$ع_0$	$ع_1$	
أ	70	170	242.9 = 100 × 70 / 170
ب	42	80	190.5 = 100 × 42 / 80
ج	14	26	185.7 = 100 × 14 / 26
ء	24	47	200.0 = 100 × 24 / 47

1- الوسط الحسابى البسيط للمناسيب :

$$= \frac{\text{مجـ } (ع_1 / ع_0) \times 100}{ن}$$

$$= \frac{200 + 185.7 + 190.5 + 242.9}{4}$$

$$= \frac{819.1}{4} = 204.8\%$$

∴ الأسعار زادت بنسبة 104.8٪ فى سنة المقارنة عنها فى سنة الأساس .

2- الوسط الهندسى البسيط للمناسيب :

= ¼ (لو 242.9 + لو 190.5 + لو 185.7 + لو 200)

$$= (2.30 + 2.26 + 2.27 + 2.38)\ ¼$$

$$= \frac{9.23}{4} = 2.31$$

وبالبحث فى جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات فإن الوسط الهندسى البسيط للمناسيب = 203.6 ٪ .

∴ الأسعار زادت بنسبة 103.6٪ فى سنة المقارنة عنها فى سنة الأساس .

3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة :

أ- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس :

وتحسب من العلاقة الآتية :

الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس

$$= \frac{\text{مجـ م و}_0}{\text{مجـ و}_0} \times 100$$

حيث م = المنسوب = $\frac{ع_1}{ع_0}$

و = $ع_0 \times ك_0$

ب- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة :

ويحسب من العلاقة الآتية :

الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة

$$= \frac{\text{مجـ م} \times \text{ون}}{\text{مجـ ون}} \times 100$$

حيث م = المنسوب = $\frac{ع_1}{ع_0}$

ون = $ع_1 \times ك_1$

مثال : من بيانات الجدول التالى :

السلعة	1995		2000	
	الكمية $ك_0$	السعر $ع_0$	الكمية $ك_1$	السعر $ع_1$
أ	100	10	120	12
ب	200	15	150	20
ج	300	8	400	10

أحسب :

1- الوسط الحسابى البسيط للمناسيب .

2- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس

3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة

الحل : نكون الجدول التالى :

السلعة	ع$_0$	ك$_0$	ع$_1$	ك$_1$	المنسوب م=ع$_1$/ع$_0$	أوزان الأساس و$_0$=ع$_0$ك$_0$	م × و	أوزان المقارنة و$_ن$= ع$_1$ك$_1$	م × و
أ	10	100	12	120	1.20	1000	1200	1440	1827
ب	15	200	20	150	1.33	3000	3990	3000	3990
ج	8	300	10	400	1.25	2400	3000	4000	5000
المجموع					3.78	6400	8190	8440	10718

1- الوسط الحسابى البسيط للمناسيب

= مجـ (ع$_1$ / ع$_0$) × 100 / ن

= 100 × 3.78 / 3 = 126٪

وهذه النتيجة تعنى أن متوسط أسعار السلع فى سنة 2000 زادت بنسبة 26٪ عن متوسط أسعارها فى سنة 1995 .

2- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس :

= (مجـ م و$_0$ / مجـ و$_0$) × 100

= (819 / 3) × 100 = 127.97٪

وهـذه النتيجـة تعنـى أن متوسـط الأسـعار المرجحـة بـأوزان سـنة الأساس فى سنة 2000 زادت بنسبة 27.97٪ عنها فى سنة 1995 .

3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة :

$$= \frac{\text{مجـ م} \times \text{ون}}{\text{مجـ ون}} \times 100$$

$$= \frac{10718}{8440} \times 100 = 127٪$$

وهـذه النتيجـة تعنـى أن متوسـط الأسـعار المرجحـة بـأوزان سـنة المقارنة فى سنة 2000 زادت بنسبة 27٪ عنها فى سنة 1995 .

اختبارات الأرقام القياسية Tests of Index Numbers

اقترح فيشر اختبارين لاختبار الأرقام القياسية وذكر أن أى رقم قياسى لايحقق هذين الاختبارين لا يعتبر رقماً قياسياً أمثل من وجهة نظره ، وهذين الاختبارين هما :

أولاً : اختبار الانعكاس فى الزمن Time Reversal

يكون الرقم قابلاً للانعكاس فى الزمن إذا حقق الشرط الآتى:

الرقم القياسى × البديل الزمنى = 1

مثال : الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار

$$\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_0}{\text{مجـ ع}_1} = 1$$

∴ الرقم يقبل الانعكاس فى الزمن

مثال : رقم إدجورث القياسى للأسعار

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1 (\text{ك}_0 + \text{ك}_1)}{\text{مجـ ع}_0 (\text{ك}_0 + \text{ك}_1)} \times \frac{\text{مجـ ع}_0 (\text{ك}_1 + \text{ك}_0)}{\text{مجـ ع}_1 (\text{ك}_1 + \text{ك}_0)} = 1$$

∴ الرقم يقبل الانعكاس فى الزمن

ثانياً : اختبار الانعكاس فى المعامل Test of Factor Reversal

يكون الرقم القياسى قابلاً للانعكاس فى المعامل إذا حقق الشرط الاتى :

الرقم القياسى × بديله المعاملى = الرقم القياسى للقيمة

أمثلة لاختبار بعض الأرقام القياسية :

1- رقم لاسبير = $\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0} \times 100$

البديل الزمنى لرقم لاسبير

$$= \frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}$$

(لاحظ أننا لإيجاد البديل الزمنى جعلنا أسعار الأساس هى أسعار المقارنة وأسعار المقارنة هى أسعار الأساس ونفس الحال بالنسبة للكمية).

البديل المعاملى لرقم لاسبير :

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ ع}_0}$$

(لاحظ أننا لإيجاد البديل المعاملى للاسبير بدلنا ك مكان ع مع الاحتفاظ بالأرقام (1 ، 0) الممثلة للمقارنة والأساس كما هى) .

(أ) اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$\frac{\text{مجـ ع }_1\text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع }_0\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1} \neq 1$$

∴ رقم لاسبير لا يقبل الانعكاس فى الزمن .

(ب) اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\frac{\text{مجـ ع }_1\text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ك }_1\text{ ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ ع}_0} \neq \text{الرقم القياسى للقيمة}$$

∴ رقم لاسبير لا يقبل الانعكاس فى المعامل .

2- رقم باش $= \frac{\text{مجـ ع }_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_1} \times 100$

البديل الزمنى لرقم باش

$$= \frac{\text{مجـ ع }_0\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_0}$$

البديل المعاملى لرقم باش :

$$= \frac{\text{مجـ } \text{ك}_1 \text{ع}_1}{\text{مجـ } \text{ك}_0 \text{ع}_1}$$

(أ) اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$\frac{\text{مجـ } \text{ع}_1 \text{ك}_1}{\text{مجـ } \text{ع}_0 \text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ } \text{ع}_0 \text{ك}_0}{\text{مجـ } \text{ع}_1 \text{ك}_0} \neq 1$$

(ب) اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\frac{\text{مجـ } \text{ع}_1 \text{ك}_1}{\text{مجـ } \text{ع}_0 \text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ } \text{ك}_1 \text{ع}_1}{\text{مجـ } \text{ك}_0 \text{ع}_1} \neq \text{الرقم القياسى للقيمة}$$

∴ رقم باش لا يقبل اختبارى الانعكاس فى الزمن والمعامل .

3- رقم مارشال وأدجورث =

$$\frac{\text{مجـ } (\text{ع}_1 \text{ك}_0 + \text{ع}_1 \text{ك}_1)}{\text{مجـ } (\text{ع}_0 \text{ك}_0 + \text{ع}_0 \text{ك}_1)} \times 100$$

البديل الزمنى :

$$= \frac{\text{مجـ } (\text{ع}_0 \text{ك}_1 + \text{ع}_0 \text{ك}_0)}{\text{مجـ } (\text{ع}_1 \text{ك}_1 + \text{ع}_1 \text{ك}_0)}$$

اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$\frac{\text{مجـ}\,(\text{ع}_1\,\text{ك}_0 + \text{ع}_1\,\text{ك}_1)}{\text{مجـ}\,(\text{ع}_0\,\text{ك}_0 + \text{ع}_0\,\text{ك}_1)} \times \frac{\text{مجـ}\,(\text{ع}_0\,\text{ك}_1 + \text{ع}_0\,\text{ك}_0)}{\text{مجـ}\,(\text{ع}_1\,\text{ك}_1 + \text{ع}_1\,\text{ك}_0)} = 1$$

∴ رقم مارشال وإدجورث يقبل الانعكاس فى الزمن .

البديل المعاملى :

$$= \frac{\text{مجـ}\,(\text{ك}_1\,\text{ع}_0 + \text{ك}_1\,\text{ع}_1)}{\text{مجـ}\,(\text{ك}_0\,\text{ع}_0 + \text{ك}_0\,\text{ع}_1)}$$

اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\frac{\text{مجـ}\,(\text{ع}_1\,\text{ك}_0 + \text{ع}_1\,\text{ك}_1)}{\text{مجـ}\,(\text{ع}_0\,\text{ك}_0 + \text{ع}_0\,\text{ك}_1)} \times \frac{\text{مجـ}\,(\text{ك}_1\,\text{ع}_0 + \text{ك}_1\,\text{ع}_1)}{\text{مجـ}\,(\text{ك}_0\,\text{ع}_0 + \text{ك}_0\,\text{ع}_1)} \neq \frac{\text{مجـ}\,\text{ع}_1\,\text{ك}_1}{\text{مجـ}\,\text{ع}_0\,\text{ك}_0}$$

∴ رقم مارشال وإدجورث لاينعكس فى المعامل .

4- رقم فيشر المثالى $= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,\text{ع}_1\,\text{ك}_0}{\text{مجـ}\,\text{ع}_0\,\text{ك}_0} \times \frac{\text{مجـ}\,\text{ع}_1\,\text{ك}_1}{\text{مجـ}\,\text{ع}_0\,\text{ك}_1}}$

البديل الزمنى $= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,\text{ع}_0\,\text{ك}_1}{\text{مجـ}\,\text{ع}_1\,\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ}\,\text{ع}_0\,\text{ك}_0}{\text{مجـ}\,\text{ع}_1\,\text{ك}_0}}$

اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_1}} \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_0}} = 1$$

∴ رقم فيشر يقبل الانعكاس فى الزمن .

$$\text{البديل المعاملى} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ ع}_0}{\text{مجـ ك}_0 \text{ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ ع}_1}}$$

اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_1}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ ع}_0}{\text{مجـ ك}_0 \text{ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ ع}_1}{\text{مجـ ك}_0 \text{ ع}_1}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0}\right)^2} = \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ ك}_0}$$

∴ رقم فيشر ينعكس فى المعامل .

ملحوظة : يلاحظ مما سبق أن الرقم القياسى لفيشر هو الرقم القياسى الوحيد الذى يقبل الانعكاس فى كل من الزمن والمعامل وهذه أحد الأسباب التى جعلت رقم فيشر يسمى برقم فيشر المثالى .

تغيير فترة الأساس :

فى بعض الأحيان نلجأ إلى تعديل فترة الأساس فى حالة إذا كانت فترة الأساس قديمة وأراد الباحث أن يجددها . ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى :

مثال : البيانات التالية توضح الرقم القياسى للأسعار (1965 = 100) خلال الفترة (1990- 1995) .

الأرقام القياسية للأسعار (1965 = 100)

السنة	1965	1990	1991	1992	1993	1994	1995
الرقم القياسى	100	90	113	135	145	158	176

المطلوب تعديل سنة الأساس إلى سنة 1994 .

الحل : لتغيير سنة الأساس إلى 1994 يتم قسمة كل رقم فى السلسلة على قيمة الرقم القياسى لسنة 1994 وضرب الناتج × 100 كالتالى :

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1990} = \frac{90}{158} \times 100 = 57$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1991} = \frac{113}{158} \times 100 = 71.5$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1992} = \frac{135}{158} \times 100 = 85.4$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1993} = \frac{145}{158} \times 100 = 91.8$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1994} = \frac{158}{158} \times 100 = 100$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1995} = \frac{176}{158} \times 100 = 111.4$$

ومن ثم نحصل على سلسلة جديدة من الأرقام القياسية (1994 = 100) كما هو موضح فى الجدول التالى :

الأرقام القياسية للأسعار (1994 = 100)

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995
الرقم القياسى	57	71.5	85.4	91.8	100	111.4

مثال : الجدول التالى يوضح سلسلة من الأرقام القياسية خلال الفترة (1987- 1998) سنة الأساس (1988 = 100)

السنة	الرقم القياسى (1988 = 100)
1987	99.2
1988	100.0
1989	104.5
1990	106.7
1991	109.8
1992	112.4
1993	116.7
1994	120.8
1995	125.6
1996	130.5
1997	148.6
1998	150.2

المطلوب : تغييرسنة الأساس إلى (1992 = 100)

الحل : لتغييرسنة الأساس إلى (1992 = 100) نقسم كل رقم فى سلسلة الأرقام القياسية المعطاة فى الجدول السابق على قيمة الرقم القياسى لسنة 1992 وضرب الناتج × 100 .

السنة	الرقم القياسى (1992 = 100)
1987	88.3
1988	89.0
1989	93.0
1990	94.9
1991	97.7
1992	100.0
1993	103.8
1994	107.5
1995	111.7
1996	116.1
1997	132.2
1998	133.6

تغيير الأرقام القياسية فى حالة وجود رقمين قياسيين يختلفان فى فترة الأساس :

فى بعض الأحيان يكون المطلوب تغيير فترة الأساس فى حالة وجود رقمين قياسيين يختلفان فى فترة الأساس ويتم ذلك من خلال المفهوم الجبرى باستخدام عملية النسبة والتناسب والتى يوضحها المثال التالى :

مثال : يبين الجدول التالى سلسلتان من الأرقام القياسية ، الأولى أساسها عام (1980 = 100) والثانية أساسها عام (1984 = 100) والمطلوب تكملة بيانات السلسلتين .

السنة	السلسلة الأولى (1980 = 100)	السلسلة الثانية (1984 = 100)
1980	100	
1981	130	
1982	160	
1983	189	
1984	220	100
1985		131
1986		148
1987		162
1988		188

الحل : للحصول على سلسلة أرقام قياسية متصلة يجب تعديل أحد الرقمين القياسيين إما يجعل سنة 1980 هى سنة أساس وبالتالى تستكمل السلسلة الأولى أو يجعل سنة 1984 هى سنة الأساس ومن ثم تستكمل السلسلة الثانية .

فلأستكمال السلسلة الأولى ، يلاحظ أن الرقم القياسى لعام 1984 فى السلسلة الأولى هو 220 وهذا الرقم يناظره فى السلسلة

الثانيــة الــرقم 100 أى أن النسـبة بينهمــا 220 : 100 وبالتــالى يمكــن تعـديل أرقــام السلســلة الثانيــة لجعلـها تتبـع أرقــام السلسـلة الأولى فــى السنوات من 1985 إلى 1988 وذلك باستخدام عملية النسبة والتناسب التالية :

100 : 220

س : 131

حيث س ترمـز إلى الـرقم القياسـى الجديـد المطلـوب لتكملـة السلسـلة الأولى

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1985} = \frac{131 \times 220}{100} = 289.51$$

100 : 220

س : 148

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1986} = \frac{148 \times 220}{100} = 325.6$$

وهكذا بالنسبة للأرقام القياسية لسنتى 1987 ، 1988 كما سوف يتضح من الجدول التالى :

ولاســتكمال أرقــام السلســلة الثانيــة نســتخدم نفــس الطريقــة الســابقة فــالرقم القياســى لســنة 1984 هــو 100 وينــاظره فــى السلســة الأولى 220 أى أن النسـبة بينهمــا 100 : 220 وبالتــالى يمكــن تعـديل أرقام السلسلة الأولى لجعلها تتبع السلسلة الثانية فى السـنوات مـن 1980 إلى 1983 وذلك باستخدام عملية النسبة والتناسب التالية :

220 : 100

100 : س

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1980} = \frac{100 \times 100}{220} = 45.45$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1981} = \frac{130 \times 100}{220} = 59.09$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1982} = \frac{160 \times 100}{220} = 72.72$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1983} = \frac{189 \times 100}{220} = 85.91$$

والجدول التالى يوضح الأرقام القياسية للسلسلتين بعد استكمالهما :

السنة	السلسلة الأولى (100 = 1980)	السلسلة الثانية (100 = 1984)
1980	100	45.45
1981	130	59.09
1982	160	72.72
1983	189	85.91
1984	220	100
1985	289.51	131
1986	325.60	148
1987	356.40	162
1988	413.16	188

الأرقام القياسية للتجارة الخارجية :

إن إحصاءات التجارة الخارجية لأى دولة تعتبر من الأساسيات التى تبنى عليها سياسة الدولة الاقتصادية حيث توضح مدى اعتمادها على العالم الخارجى من خلال قياس التغيرات فى حجم وهيكل التجارة الخارجية وإحداث التنمية فى مختلف القطاعات المكونة للمقتصد القومى مثل القطاعات الإنتاجية والاستهلاكية والاستثمارية وغيرها . ويمكن الاستفادة من الأرقام القياسية للتجارة الخارجية فى توضيح التغيرات التى قد تطرأ على قيم وكميات وأسعار كل من الصادرات والواردات .

وتستخدم الأرقام القياسية لكمية وأسعار وقيم كل من الصادرات والواردات فى حساب المؤشرات الاقتصادية التالية :

(1) معدل التبادل الدولى الاجمالى = $\frac{\text{الرقم القياسى لكمية الواردات}}{\text{الرقم القياسى لكمية الصادرات}} \times 100$

وزيادة هذه النسبة عن الواحد الصحيح تعنى أنه فى مقابل كمية معينة من الصادرات أمكن الحصول على قدر أكبر من الواردات .

(2) معدل التبادل الدولى الصافى = $\frac{\text{الرقم القياسى لأسعار الصادرات}}{\text{الرقم القياسى لأسعار الواردات}} \times 100$

فإذا كان هذا المعدل يساوى 100 يدل ذلك على أن التغير الذى حدث فى أسعار الصادرات قابلة تغير مساوى له فى أسعار الواردات . أما إذا كان هذا المعدل أكبر من 100 فمعنى هذا أن أسعار الصادرات قد ارتفعت بالمقارنة بأسعار الواردات ويكون ذلك فى صالح الدولة .

$$\text{أو نسبة التبادل} = \frac{\text{الرقم القياسى لأسعار الصادرات}}{\text{الرقم القياسى لأسعار الواردات}} \times 100$$

ويرجع الاهتمام بهذه النسبة أنها تدلنا على مدى سيطرة صادرات الدولة على وارداتها . وأنها تدلنا على مقدار القوة الشرائية للدولة بالنسبة للخارج ، فإذا كانت هذه النسبة أقل من الواحد الصحيح دل ذلك على أنها فى غير صالح الدولة لأن ذلك يعنى أن أسعار الصادرات أقل من أسعار الواردات مما يؤثر سلباً على الميزان التجارى للدولة .

بينما إذا زادت هذه النسبة عن الواحد الصحيح دل ذلك على أنها فى صالح الدولة لأن ذلك يعنى أن أسعار الصادرات تكون أكبر من أسعار الواردات مما يكون له أثر إيجابى على الميزان التجارى للدولة .

ولتوضيح المفهوم السابق نفرض أن دولة مثل ليبيا تصدر النفط وتستورد القمح فإذا زاد الطلب على النفط الليبى ، فإن سعره يرتفع ، وعندئذ تستطيع ليبيا أن تشترى بهذا السعر من الخارج سلعاً أكثر عدداً من ذى قبل ، فى مقابل نفس الكمية المصدرة من النفط وعندئذ تعتبر نسبة التبادل فى صالح ليبيا :

الحالة	وحدات مصدرة		السعر		وحدات مستوردة		السعر
قبل زيادة الطلب على النفط	900	×	4	=	3600	×	1
بعد زيادة الطلب على النفط	900	×	8	=	7200	×	1

فقد تضاعفت أسعار صادرات النفط من 4 إلى 8 ، وأصبح رقمها القياسى 200٪ بينما ظلت أسعار الواردات كما هى ورقمها

القياسى 100 وارتفعت نسبة التبادل إلى 2 وذلك بافتراض توازن ميزان المدفوعات خلال فترتى المقارنة (1 ، 2) .

وإذا كان المطلوب قياس أثر التجارة الخارجية على الدخل القومى الحقيقى وعلى الرفاهية الاقتصادية فإن المقياس المناسب هو معدل التبادل الداخلى والذى يأخذ فى الاعتبار كل من سعر وكمية الصادرات والواردات حيث :

$$\text{(3) معدل التبادل الداخلى} = \frac{\text{الرقم القياسى لقيمة الصادرات}}{\text{الرقم القياسى لقيمة الواردات}} \times 100$$

أو = معدل التبادل التجارى × الرقم القياسى لكمية الصادرات

ويعبر هذا المعدل عن كمية الواردات التى أمكن الحصول عليها مقابل العائد من الصادرات ، ويكون هذا المعدل فى صالح الدولة إذا كان أكبر من الواحد الصحيح والعكس صحيح .

تمارين

(1) الجدول الآتى يوضح أسعار بعض السلع الغذائية أ ، ب ، ج ، ء ، هـ عن عامى 1980 ، 1990 بالجنيه لكل كيلو جرام .

السلعة	1980	1990
أ	35	45
ب	40	60
ج	55	80
ء	60	90
هـ	80	110

المطلوب :

1- حساب الرقم التجميعى البسيط للأسعار باستخدام سنة 1980 أساس .

2- الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار باستخدام سنة 1980 أساس .

(2) فيما يلى جدول يوضح أسعار وكميات ثلاثة سلع أ ، ب ، ج فى عامى 1990 ، 1995 بالجنيه لكل كيلو جرام .

السلعة	الأسعار		الكميات	
	1990	1995	1990	1995
أ	10	50	28	16
ب	20	90	15	14
ج	30	140	20	10

المطلـوب : حسـاب الأرقـام القياسـية التاليـة مـع تفسـير النتـائج المتحصل عليها باعتبار سنة 1990 أساس

1- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار .

2- الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات .

3- الرقم القياسى التجميعى البسيط للقيمة .

(3) احسب الأرقام القياسية التالية من بيانات جدول تمرين (2)

أ- الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات فترة الأساس (لاسبير) .

ب- رقم باش .

ج- رقم مارشال- إدجورث .

ء- رقم فيشر المثالى .

(4) فيما يلى أسعار وكميات ثلاث سلع لعامى 1995 ، 2000

السلعة	الأسعار		الكميات	
	1995	**2000**	**1995**	**2000**
أ	120	160	40	60
ب	180	220	30	80
ج	240	300	50	54

وباعتبار سنة **1995** أساس أحسب الآتى :

أ- الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار .

ب- الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار .

(5) باستخدام نتائج تمرين (3) المطلوب اختبار الانعكاس فى الزمن والانعكاس فى المعامل .

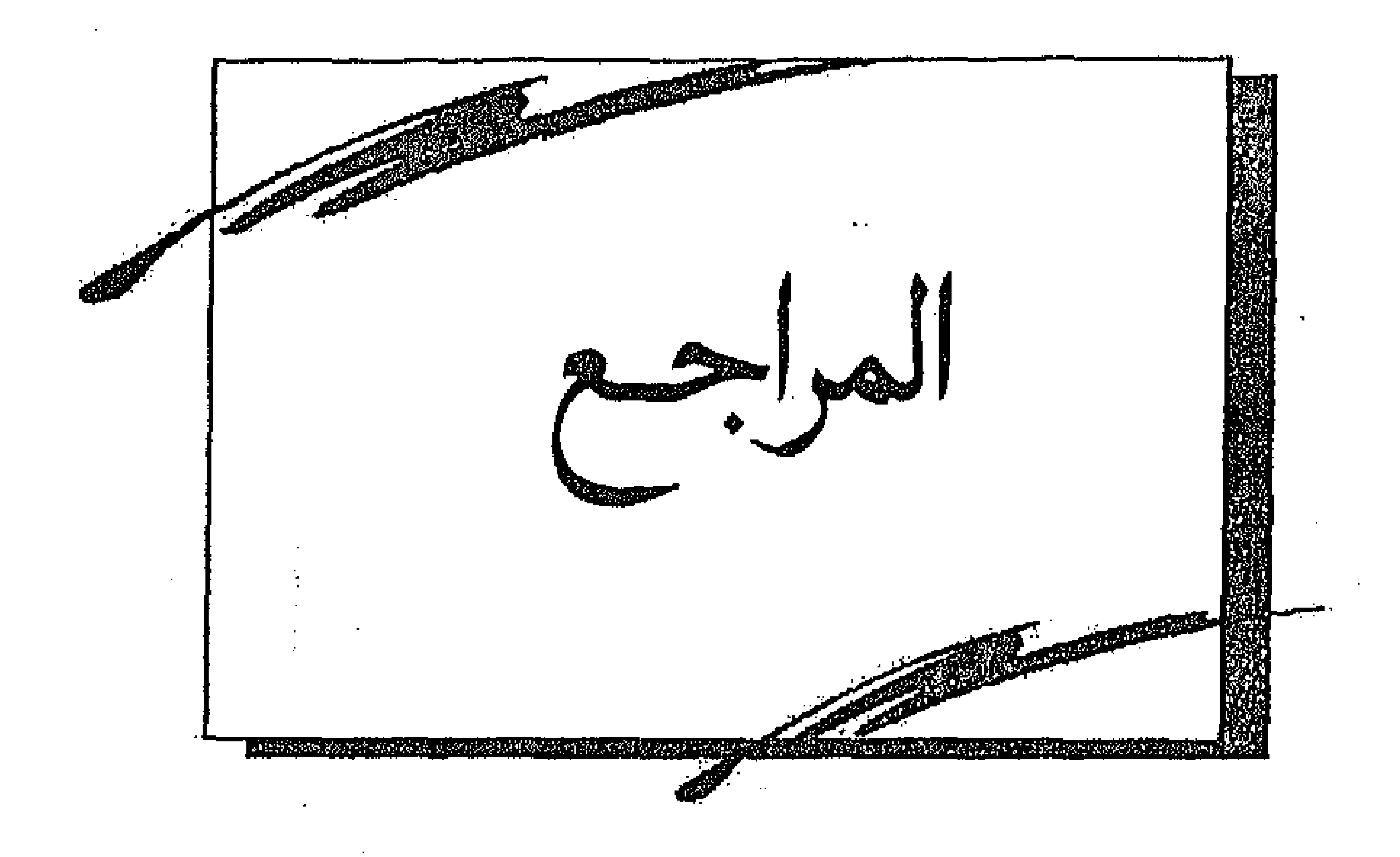
(6) الجدول الآتى يمثل متوسط الأجر الشهرى لبعض الصناعات الاستثمارية فى مصر فى عامى 1996 ، 1998 .

السنة	صناعة 1	صناعة 2	صناعة 3	صناعة 4
1996	420	480	520	550
1998	600	700	900	1200

والمطلوب تركيب رقم قياسى بسيط للأجور باعتبار سنة 1996 أساس .

(7) المطلوب تكملة بيانات الجدول التالى :

السنة	**1965 = 100**	**1975 = 100**
1964	94	
1965	100	
1966	103	
1967	106	
1968	108	
1969	109	
1970	112	
1971	120	
1972	125	
1973	130	
1974	140	
1975	170	100
1976		129
1977		135
1978		145
1979		160
1980		175


المراجع

أولاً : مراجع باللغة العربية :

1- أحمد عبادة سرحان ، **العينات** ، مكتبة النهضة المصرية ، 1975

2- أحمد عباده سرحان ، صلاح الدين طلبة ، **أسس الإحصاء** ، دار الكتب الجامعية ، الإسكندرية ، 1986 .

3- السيد محمد خيرى ، **الإحصاء فى البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية** ، دار النهضة العربية ، 1970

4- جابر أحمد بسيونى (دكتور) ، **المبادئ الأساسية للمحددات والمصفوفات والاحتمالات وتطبيقاتها فى العلوم الزراعية** ، كلية الزراعة (سابا باشا) ، جامعة الإسكندرية ، 1999 .

5- محمد صلاح الدين صدقى ، **مبادئ النظرية الإحصائية** ، دار النهضة العربية ، 1967 .

6- فاروق عبد العظيم (دكتور) وآخرون ، **مقدمة فى الإحصاء** ، دار المطبوعات الجامعية ، الإسكندرية 1983 .

ثانياً : مراجع باللغة الأجنبية :

1- Alder, H.L. and Roessler, E.B., **Introduction to Probability and Statistics**, W.H. Freeman Company, San Fran Cisco, U.S.A., 1986.

2- Anderson, R.L. and Bancroft, T.A., **Statistical Theory in Research**, McGraw-Hill, New York, 1952.

3- Anderson, O.D., **Time Series Analysis and Forecasting**, The Box-Jenkins Approach, Butterworth, London, 1977.

4- Bails, Sale G., and Larry C., **Business Fluctuations: Forecasting Techniques and Applications**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.

5- Barry R. and Ralph M., **Quantitative Analysis for Management**, 3rd Edition, Allyn Baron Inc., U.S.A., 1988.

6- Blalock, H.M., **Social Statistics**, McGraw-Hill, N.Y., 1972.

7- Bowerman, Bruce L., and Richard T., **Time Series Analysis and Forecasting**, 2nd Ed. Duxburry, North Scituate.

8- Brillinger, David R., **Time Series Data Analysis and Theory**, Holt, Rinehart and Winstor, N.Y., 1963.

9- Broen, Robert Boodel, **Smothing, Forecasting and Predection of Discrete Time Series,** Printice. Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.

10- Cochran, W.G., **Sampling Techniques**, Johnwiley Sons, N.Y., 1953.

11- Cramer, Harald, **The Elements of Probability Theory**, Wiely, New York, 1955.

12- Croxton, F.E. and Cowden, D.J., **Applied General Statisticis**, Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffes, N.J., 1955.

13- Draper, N.R. and H. Smith, **Applied Regression Analysis**, Wiley, New York, 1977.

14-Feller, Williams, **An Introduction to probability Theory and Its Application**, Vol 1, Wiely, New York, 1950.

15-Freund, John F., **Mathematical Statistics**, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J., 1980.

16-Hogg, Robert V., and Allen T. Craig, **Introduction to Mathematical Statistics**, 4th Edition, Macmillan, New York, 1978.

17-Johnston, J., **Econometric Methods**, McGraw-Hill Book Co., New York, 1963.

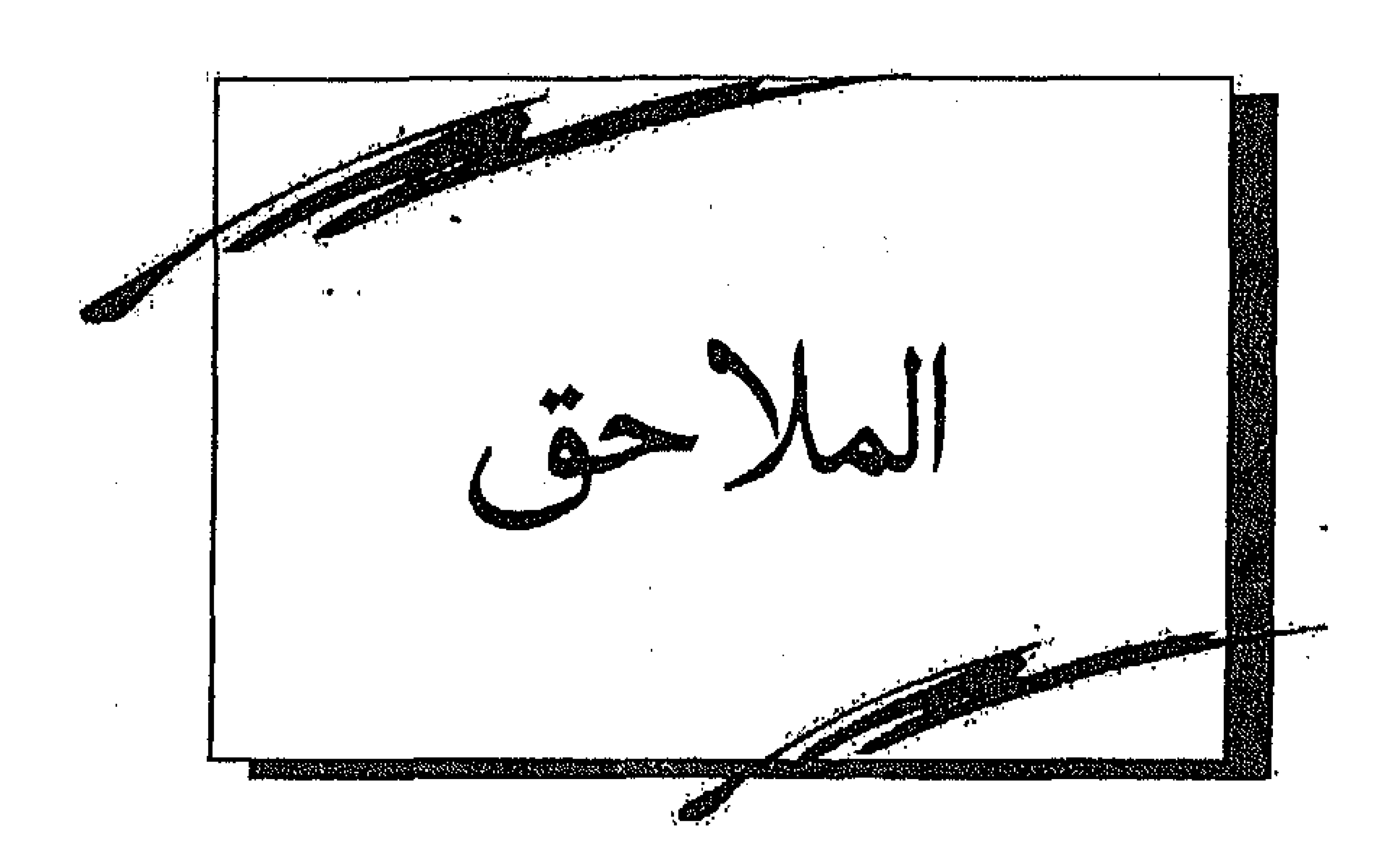
18-Larsen, Richard J., and Morris L. Marx, **An Introduction to Mathematical Statistics and Its Application**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

19-Mc Call, Chester H., **Sampling and Statistical Handbook for Research**. Iowa State University Press, Ames, 1982.

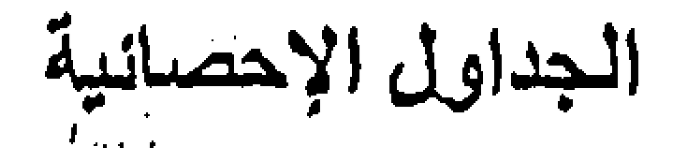
20- Montgomery, Douglas C., and Lynwood A., Johnson, **Forecasting and Time Series Analysis**, McGraw-Hill, New York, 1976.

21-Warwich, Donald P., and Charles A. Lininger, **The Sample Survey: Theory and Practice**, McGraw-Hill, New York, 1975.

22-Wayne W. Daniel and James C. Terrel, **Business Statistics for Management and Economics**, 5th ed., Houghton Miffin Co., U.S.A., 1989.


الملاحق

الجداول الإحصائية



الجداول الإحصائية

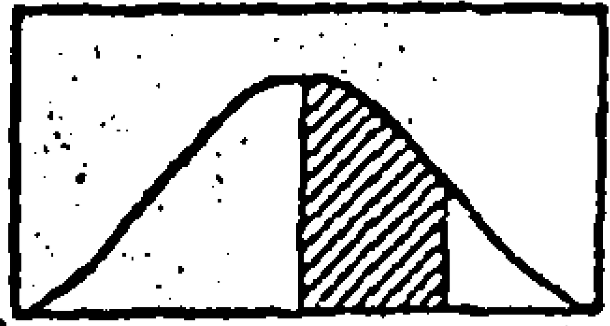


Table I. Table of Areas of the Normal Curve

$(Y-\mu)/\sigma = Z$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3233
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4758	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4989	.4988	.4989	.4989	.4990	.4990

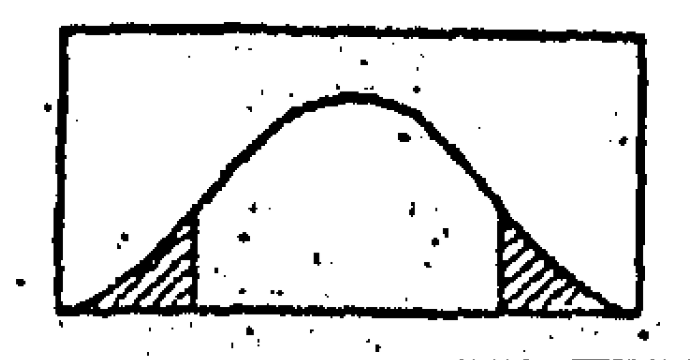


Table II. Distribution of t

Degrees of freedom	Probability 0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

SOURCE: Table II is reprinted from Table III of Ronald A. Fisher and Frank Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research*, 4 ed., 1953, published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh, by permission of the authors and publishers.

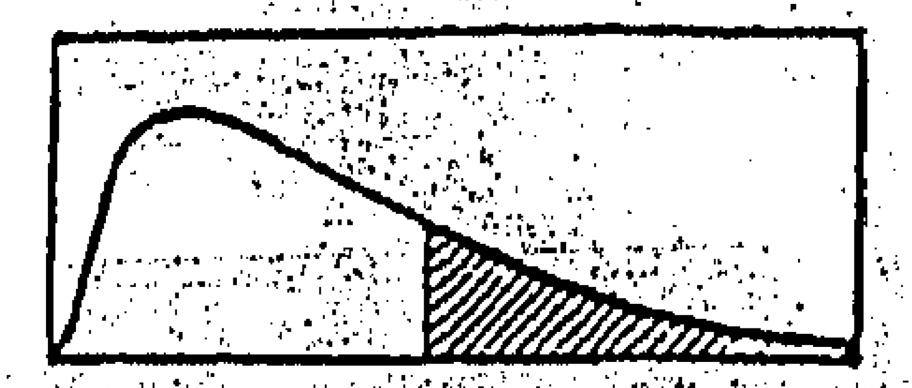


Table III. Table of Chi Square

Degrees of freedom	Probability that chi-square value will be exceeded									
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	$0.0^{4}393$	$0.0^{3}157$	$0.0^{3}982$	$0.0^{2}393$	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.80	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
Z_α	−2.58	−2.33	−1.96	−1.64	−1.28	+1.28	+1.64	+1.96	+2.33	+2.58

NOTE: For $\nu > 100$ (i.e., for more than 100 degrees of freedom) take

$$\chi^2 = \nu\left[1 - \frac{2}{9\nu} + Z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right]^3 \quad \text{or} \quad \chi^2 = \tfrac{1}{2}[Z_\alpha + \sqrt{(2\nu - 1)}]^2$$

according to the degree of accuracy required. Z_α is the standardized normal deviate corresponding to the α level of significance, and is shown in the bottom line of the table.

SOURCE: By permission of Prof. E. S. Pearson, from Catherine M. Thompson, "Tables of the Percentage Points of the Incomplete Beta Function and of the χ^2 Distribution," *Biometrika*, vol. 32, pp. 168–181, 188–189, 1941.

Table IV. F Distribution

df for denominator	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
	Degrees of freedom for the numerator																		
	Upper 10 per cent points																		
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.20	60.70	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53

25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.5
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.5
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.4
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.4
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.4
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.4
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.3
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.2
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.1
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.0

Upper 5 per cent points

1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.5
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.6
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.3
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.6
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.2
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.9
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.7
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.5
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.4
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.3
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.2
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.1
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.0
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.0
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.9
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.9
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.8

Table IV. F Distribution (Continued)

df for denominator	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
	Degrees of freedom for the numerator																		
	Upper 5 per cent points																		
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00
	Upper 1 per cent points																		
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88

7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

SOURCE: By permission of Prof. E. S. Pearson, from M. Merrington and C. M. Thompson, "Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (F) Distribution," *Biometrika*, vol. 33, p. 73, 1943.

المحتويات

الموضوع	رقم الصفحة

الموضوع	رقم الصفحة
طريقة العزوم لحساب معادلة خط الانحدار	151
اختبار معنوية معامل الانحدار	152
خطأ التقدير	160
معادلة الاتجاه العام الزمنى	165
التطبيق على السلاسل الزمنية	168

الفصل السابع


مبادئ الاحتمالات


الموضوع	رقم الصفحة



رقم الإيــداع : 2013/24053
الترقيم الدولى : 2-082-735-977-978

مـع تحـيات
دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر
تليفاكس: 5404480 - الإسكندرية


مكتبة الوفاء القانونية


مكتبة الوفاء القانونية



المؤلف

الدكتور / جابر أحمد بسيوني شحاته

أستاذ الإقتصاد الزراعي بكلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية

- تخرج من كلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية .
- تدرج من وظيفة معيد إلي وظيفة أستاذ بقسم الإقتصاد الزراعي ثم رئيساً لذات القسم بكلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية
- نشر له أكثر من ستين بحثاً محلياً وعالمياً في مجال التخصص .
- عضو اللجنة العلمية الدائمة لترقية أعضاء هيئة التدريس الاساتذة والاساتذة المساعدين تخصص الأقتصاد الزراعى والإرشاد والمجتمع الريفي .
- شارك في العديد من المؤتمرات والندوات العلمية المحلية والإقليمية والعالمية .
- ساهم في الإشراف علي ومناقشة العديد من رسائل الماجستير والدكتوراه محلياً وإقليمياً .
- قام بإعداد العديد من المؤلفات في مجال التخصص مثل :

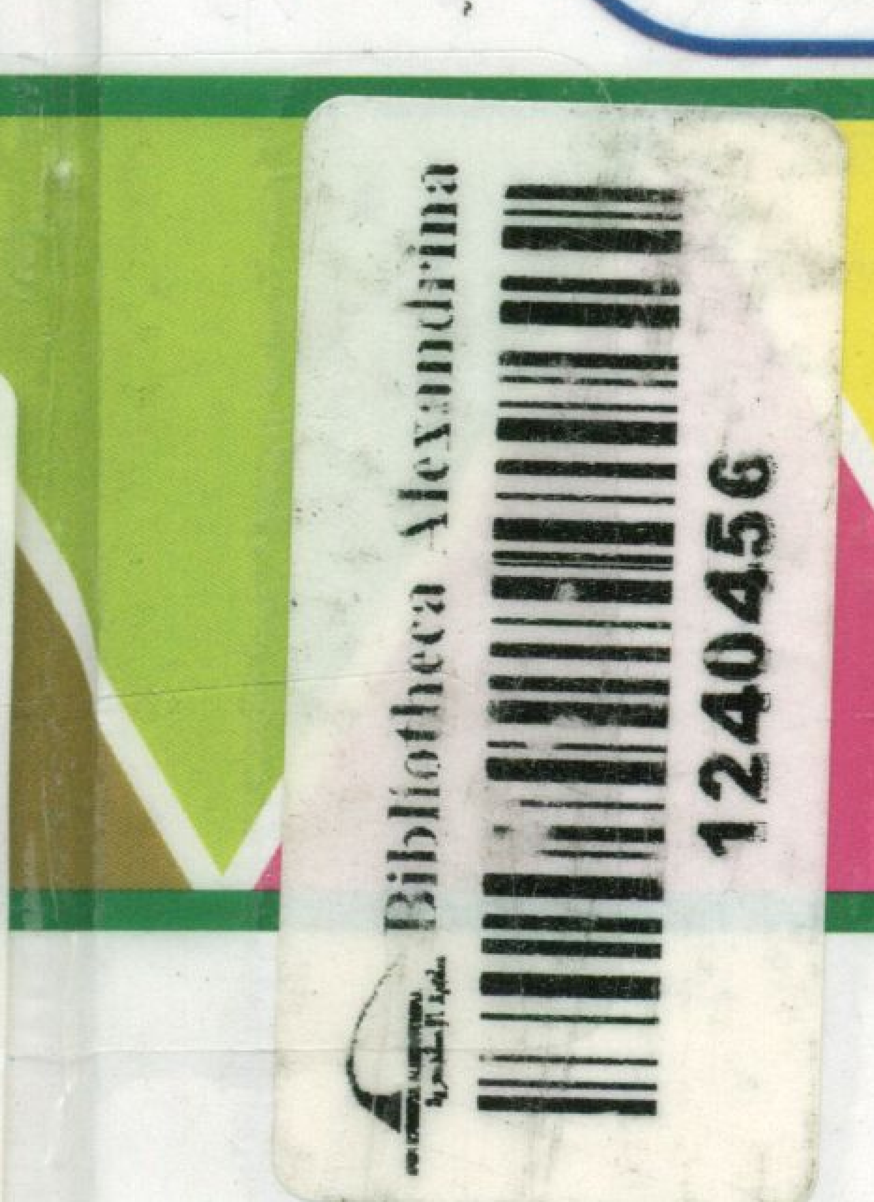
مبادئ الإقتصاد - التنمية الزراعية - الإحصاء التطبيقي

نظرية الدوال والمعادلات التفاضلية - المصفوفات والمحددات ونظرية الإحتمالات

الإتجاهات الحديثة في إدارة الجودة الشاملة - الإتجاهات المعاصرة في التسويق الزراعي وإدارة الجودة الشاملة .

هذا الكتاب

يتناول الموضوعات التالية : التعريف بعلم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى، ومراحل البحث الإحصائى، ومقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت، وتحليل الارتباط ، وتحليل الانحدار ، والتوزيعات الإحصائية ، ونظرية الاحتمالات، والأرقام القياسية .





ISBN:977-735-082-2

